This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

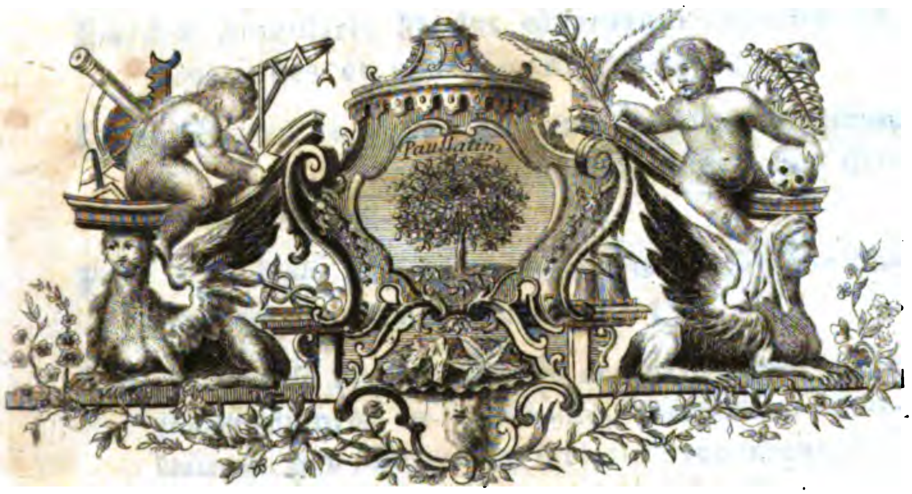
L Soc 3983.5


L Soc 3983.5
9468
7
1630 : SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL :
CHRISTO ET ECCLESIAE
Ex Dono
N. Hurd Sc.
BOSTON.

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

TOMVS V.

AD ANNOS cIↄIↄCCXXX. et cIↄIↄCCXXXI.



PETROPOLI,

TYPIS ACADEMIAE.

cIↄIↄCCXXXVIII.

LSoc 3983.5

INDEX
COMMENTARIORVM
IN CLASSE MATHEMATICA.

Frid. Chriſtoph. Maieri Noua Methodus calculandi Eclipſes Lunares. pag. 3.

Io. Bernoulli Solutiones nouorum quorundam Problematum Mechanicorum. pag. 11.

Frid. Chriſtoph. Maieri Problemata Trigono-Sphaerica tria pag. 25.

Eiusdem Singularis Modus obſeruandi ſiderum declinationes et altitudinem Poli. pag. 33

Leonh. Euleri de Progreſſionibus transcendentibus, ſeu quarum termini generales Algebraice dari nequeunt pag. 36.

Frid. Chriſtoph. Maieri Problematis de Stationibus Planetarum. Caſus alter pag. 57.

Dan. Bernoulli Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque reſolutione per Methodum ſerierum recurrentium: vt et de noua ſerierum ſpecie. Praelectio prima. pag. 63.

Eiusdem Praelectio ſecunda. pag. 70.

Georg.

Georg. Wolfg. Krafft Solutio Problematis Catoptrico-Geometrici. pag. 82.

Leonh. Euleri de Summatione innumerabilium Progreſſionum. pag. 91.

Dan. Bernoulli Diſſertatio breuis de motibus corporum reciprocis ſeu oſcillatoriis, quae vbique reſiſtentiam patiuntur quadrato velocitatis ſuae proportionalem. pag. 106.

Eiusdem Addidamentum ad Theoremata. pag. 126.

Leonh. Euleri quomodo data quacunque curua inuenire oporteat aliam, quae cum data quodammodo iuncta ad Tautochronismum producendum ſit idonea. pag. 143.

Eiusdem de communicatione motus in colliſione corporum. pag. 159.

Eiusdem de Curuis rectificabilibus Algebraicis atque traiectoriis reciprocis Algebraicis. pag. 169

Dan. Bernoulli Specimen Theoriae Nouae de menſura ſortis. pag. 175.

IN CLASSE PHYSICA.

J. G. Du Vernoi de Glandulis Renalibus Euſtachii. pag. 187.

Joſ. Weitbrecht de Figura et ſitu Veſicae vrinariae. pag. 194.

Georg.

Georg. Bernh. Bülffinger de Radicibus et Foliis Cichorii. pag. 198.

J. G. Du Vernoi Aër inteſtinorum tam ſub extima quam intima tunica incluſus. pag. 213.

Eiusdem Obſeruationes de quadrupede volatili Ruſſiae. pag. 218.

Joſ. Weitbrecht de Notis Characteriſticis Oſſium. pag. 234.

J. G. Gmelin de Augmento Ponderis, quod capiunt quaedam corpora, dum igne calcinantur. pag. 263.

J. G. Leutmann ad grauitatis liquorum differentiam cognoſcendam. pag. 273.

J. G. Gmelin de Salibus Alkalibus fixis Plantarum. pag. 277.

IN CLASSE HISTORICA.

Theoph. Siegfr. Bayeri Conuerſiones rerum Scythicarum temporibus Mithridatis Magni et paullo poſt Mithridatem. pag. 297.

Eiusdem Numus Aegienſis Illuſtratus. pag. 361.

Eiusdem Faſti Achaici pag. 374.

Eiusdem Faſtii Achaici Illuſtrati. pag. 382.

In Obſeruationibus Aſtronom. et Phyſ.

J. N. De L'Isle ContinuatioEclipſium Iouis Satellitum. pag. 451.

Obſeruatio defectus Lunae, habita Patavii ab *Io. Poleno.* pag. 458.

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

NOVA METHODVS
CALCVLANDI
ECLIPSES LVNARES.
AVCTORE
F. C. *Maiero.*

I.

KEplerus in Rudolphinis p. 99. et 101. punctum orbitae lunaris, in quo fit maxima obſcuratio, diſtinguit a loco copulae; eo enim momento, quo vtrumque luminare a nodo aequaliter remotum eſt, copulam celebrari pronunciat; at, ſi luna ibi verſatur vbi linea centra luminarium iungens ad orbitam lunarem normalis eſt, in loco maximae obſcurationis eſſe arbitratur. Mihi pro certo eſt, duo haec loca non eſſe diuerſa, ſic vero definiri debere, quod ibi et copula et maxima obſcuratio fiat, vbi linea centra iungens omnium eſt breuiſſima. Interim tamen copulae definitionem Keplerianam tanquam vſu receptam retinebo, eamque diſtin- Tabula I.

 guam

quam a definitione loci, vbi maxima obſcuratio contingit, ſiue, vbi centra ſibi ſunt proxima. Hinc breuiſſimam centrorum diſtantiam, vti et diſtantias pro initio et fine eclipſeos, noua ratione indagare in praeſenti ſcripto docebo.

Fig. 1. 2. Sint poſitione datae A☊ et B☊ viae rectae duorum mobilium ☉ et ☾ aequabiliter latorum; Sint etiam duo loca ☉ et ☾ data, in quibus ſimul exiſtunt mobilia; quaerantur duo alia loca S et L, in quibus mobilia datam a ſe inuicem diſtantiam SL obtinent.

Ponatur ſinus anguli A☊B $= g$, et coſinus $= c$, ſumto r pro ſinu toto, velocitas ipſius ☉ ſit ad velocitatem ☾ vti m, ad n, diſtantia SL ſit $= f$, ☉☊ $= a$ et ☾☊ $= b$, quaeratur L☾ $= x$. ſiue S☉ $= \frac{m}{n}x$. Fiet praeterea S☊ $= \frac{an + mx}{n}$ et L☊ $= b + x$, conſequenter ipſa SL determinatur per regulam, a me in Comment. A. praecedentis datam, cuius ope ſequentem ſum nactus aequationem $(rn^2 + rm^2 - 2cmn)x^2 + 2(ramn + rn^2b - bcnm - acn^2)x = rn^2f^2 + 2abcn^2 - ra^2n - rb^2n^2$, quae pro more rite tractata reddit $x = n\frac{c(an+bm) - r(am+bn) \pm \sqrt{rff(rmm+rnn-2cmn) - gg(an-bm)^2}}{rmm+rnn-2cmn}$.

3. Apparet duplicem eſſe valorem ipſius x, adeoque duo aſſignari poſſe loca mobili ☾, in quibus ab altero ☉ datam habet diſtantiam, ceterum

terum ſi quantitates cognitae per numeros logarithmicos datae ſunt, valor ipſius x regulis, quas olim dedi, commode inueniri poteſt.

4. At multo commodior fit calculus ſi $a=b$ (quem quidem caſum in negotio eclipſium ſemper formare licet, obtinet enim in copulis), tum enim erit $x=n\times$

$$\frac{-(r-c)a(m+n)\pm\sqrt{rff(rmm+rnn-2cmn)-aag(n-m)^2}}{rmm+rnn-2mnc}.$$

5. In media eclipſi centra luminarium quam proxime ab inuicem diſtant; neceſſe ergo eſt, vt ille locus definiatur in quo luna a ſole quam minimam ſeruat diſtantiam. Hoc fit ſi quantitas problematis ſuperioris quaeſita ſtatuatur eſſe omnium minima, quae inuenitur, differentiando primam ſupra exhibitam aequationem, vt impetretur $x=-na\,\frac{(r-c)(m+n)}{nn(r-\frac{cm}{n})-mm(\frac{cn}{m}-r)}$ ſeu $x=-na\,\frac{(r-c)(m+n}{rm^2+rn^2-2mnc}$ ponendo ſcilicet $a=b$, pro caſu facillimo.

6. Vt problema ad eclipſium caſus applicetur, notandum eſt in aequatione praecedente, a ſignare diſtantiam vtriusque luminaris a nodo eandem vtrinque, g eſſe ſinum anguli quo inclinatur orbita lunae ad eclipticam, c eſſe coſinum, et $r-c$ ſinum verſum eiusdem anguli. Item, m eſſe

 motum

motum horarium ſolis, n vero lunae, f quoque eſſe ſummam ſemidiametrorum vmbrae et lunae, et denique x eſſe ſpatium quo diſtat initium et finis eclipſeos a locis luminarium primo aſſumtis.

7. Exemplo ex Rudolphinis pag. 103. depromto calculum illuſtrabo. Anno 1616. Aug. $\frac{16}{26}$ die fuit copula poſt meridiem Vraniburgi tempore aequali

	H ′ ″
(ſecundum data Kepleri)	15. 29. 4
	S °
Locus ſolis erat	5. 3. 57. 1
Locus ☾ in ſua orbita	11. 3. 57. 1
Locus ☋	5. 9. 38.27
Diſtantia ☾ et vmbrae a ☋	5. 41 26
ergo logarithmus ipſius a = −	173881
Quia inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam in	
	° ′ ″
copulis Keplero conſtanter eſt	5. 18. 0
erit inde log. g	238195
— — + log. c	421
— — + log. $(r-c)$	545490
	′ ″
Semidiameter vmbrae	49. 32
Semidiameter lunae	16. 22
ergo f.	65. 54
et log. f	− 9370
	′ ″
Horarius lunae = n	38. 22
— — — vmbrae = m	2. 25
ergo $n-m$ =	35. 57

et

et log. $(n-m)^2 =$	102444
Porro erit $(n+m) =$	40′. 47″
ergo $l(n+m) =$	38607
log. n	44716
log. m	321196
ergo log. n^2	89432
et n^2	24′. 32″
item log. m^2	642392
et m^2	0. 5$\frac{1}{2}$″
ergo $r(n^2+m^2)$	24′. 37$\frac{1}{2}$″
log. $mnc =$	366333
log. 2	− 69315
ergo log. $2mnc$	297018
et $2mnc$	3′. 4$\frac{2}{3}$″
ergo $r(n^2+m^2)-2mnc =$	21. 32$\frac{5}{8}$
et log. $(r(n^2+m^2)-2mnc) =$	102410
log. $(na(r-c)(m+n)) =$	455032
inde fit log. $x =$	342622

et x, hoc eſt diſtant. copulae a media eclipſi = 1′. 57″

(NB. Hic arcus aufertur a copula ſi luna eſt poſt nodum (§. 5.) ſed ante nodum additur).

Hunc arcum percurrit luna intra	3′. 3″
copula erat	H. 15. 29′. 4″
ergo obſcuratio maxima fit	15. 32. 7
Keplerus habet	15. 33. 48

Sol

Sol interea percurrit	7″
ergo vmbra diſtat a ☋	5° 41′ 19″
et luna ab ☋ diſtat	5° 39′ 29″
Hiſce datis et angulo inclinationis trigonometrice inuenitur diſtantia centrorum =	31′ 30″
eſt vero ſumma ſemidiametrorum	65′ 54″
ergo ablato arcu inter centra reſtant	34′ 24″
Diameter lunae eſt	32′ 43″

Eclipſis ergo totalis eſt cum mora.

Pro fine et initio.

log. ff	−18740
log. $ff\sqrt{(rm^2+rnn-2mnc)}=$	83670
numerus ipſe =	25′ 59″ 20‴
l. $aa=$	−347762
l. gg	476390
	128628
$(n-m)^2=$	102444
log. $(aagg(n-m)^2)=$	231072
Numerus ipſe	5′ 57″ 5‴
ergo $ff(rm^2+rn^2-2nmc)-ggaa(n-m)^2=$	20′ 2″ 15‴
eius logarithmus =	109674
radicis logar.	54837
l. $n=$	44716
log. $n\sqrt{(ff(rmn-rnn-2nmc)-ggaa(n-m)^2)}=$	99553
Numerus ipſe	22′ 10″ 17‴

$na(r-c)$

$na(r \div c)(m+n) =$	0. 38. 2
differ.	21. 32. 15
Summa	22. 48. 19
Logar. differ.	102454
—— ſummae	96733
Log. $(rmm - rnn - 2mnc) =$	102410
{ l. $+ x =$	$+ 44$
{ l. $- x =$	$= - 5677$
	′ ″ ‴
{ ergo $+ x =$	59. 58. 30.
	° ′ ″ ‴
{ —— $- x =$	1. 3. 30. 40
	H. ′ ″
tempus pro $+ x =$	1. 33. 48
tempus pro $- x =$	1. 39. 30
tempus copulae $=$	15. 29. 4
Initium $=$	13. 55. 16
Finis $=$	17. 8. 34
	° ′ ″
Duratio eclipſeos $=$	3. 13. 18
Semiduratio	1. 36. 39
Init.	13. 55. 16
Medium eclipſeos	15. 31. 55
Obſcuratio maxima fit	15. 32. 7
	″
Differentia $=$	12

Vnde patet, hanc differentiam non eſſe prorſus contemnendam, vti vulgo fit

Pro Mora.

Formula morae (ſicut et durationis) eſt haec:

$$= \frac{2n\sqrt{(rff(rmm + rnn - 2mnc) - aagg(n-m)^2)}}{rmm + rnn - 2mnc}$$

 vbi

vbi f = differentiae ſemidiametrorum =	$33'\ 10''$
cuius logarithmus =	59280
log. ff =	118560
log. $rffV$(——————) =	220970
cuius numerus =	$6'\ 35''\ 30'''$
$aagg(n-m)^2$ =	$5.\ 57.\ 5$
$(rff(rmm+rnn-2mnc)-aagg(n-m)^2)$ =	$39.\ 25$
cuius logarithmus	451458
et logar. radicis =	225729
log. $2n$ =	− 24597
	201132
log. $(rmm+rnn-2mnc)$ =	102410
logarithmus ſcrupulorum morae	98722
log. n.	44716
logarithmus morae	54006
Mora ipſa =	0 H. $34'\ 58''$
Keplerus habet	0. 34. 48

8. Atque ita dispaleſcit, quid differat mea methodus a vulgari. Cuiuis liberum eſto de ea ſtatuere quod ipſi videbitur.

Io. Bernoulli SOLVTIONES NOVORVM QVORVNDAM PROBLEMATVM MECHANICORVM.

Excerptae ex litteris ad Filium Danielem Petropolin datis d. 3. Iun. St. n. 1730.

Problema.

Sit ACK triangulum materiale rectangulum in *k*, quod ſuper plano horizontali DH ſine omni frictione moueri poſſit. Sit etiam corpus graue *m* quod ſuper hypothenuſa AC poſitum ſua grauitate deſcendat pariter ſine frictione; quo fiet vt deſcendente corpore, triangulum iugiter ab eo preſſum retrocedere cogatur. Quaeritur tum corporis tum trianguli velocitas, tum etiam via quam corpus ex motu compoſito deſcribit atque vtriusque lex accelerationis. Tabula I. Fig. 2.

Definitio.

Corpus aliquod vi acceleratrice animari dicitur, quando ab ea continuo ad motum vrgetur vel ſolicitatur ſecundum quamcunque directionem.

Lemma I.

Si corpori alicui, cuius maſſa A, et vis acceleratrix qua animatur p, ſuperaddatur maſſa B nullam habens vim acceleratricem, animabitur maſſa compoſita vi acceleratrice $= \frac{pA}{A+B}$. Vid. Act. Lips. 1714. vbi haec fuſius expoſui.

Lemma 2.

Fig. 3. Si corpus aliquod C animatur, ſimul duabus viribus acceleratricibus vniformibus ſecundum diuerſas directiones CR et CS, quae vires ſint vt ipſae lineae CR et CS, compleaturque parallelogrammum SR, mouebitur corpus ſecundum diagonalem CT eodem modo ac ſi vna tantum vi vniformi expreſſa per CT animaretur. Et tres iſtae longitudines CR, CS, CT eodem tempore percurrerentur, ſi corpus ſingulis iſtis viribus ſeorſim animaretur, eruntque velocitates acquiſitae in R, S, T, vt ipſae lineae CR, CS, CT. Patet ex compoſitione virium mortuarum.

Lemma 3.

Duo corpora animata diuerſis viribus acceleratricibus p et P, ſi in motu ſint conſtituta temporibus ſiue aequalibus ſiue inaequalibus, erunt eorum velocitates vltimo acquiſitae in ratione compoſita ex ſubduplicata virium et ſpatiorum percurſorum s et S, hoc eſt vt $\sqrt{p} \times \sqrt{s}$ ad $\sqrt{p} \times \sqrt{S}$. Demonſtr. in Act. Lips. 1713.

Se-

Sequitur nunc SOLVTIO *Problematis; praeuia tamen praeparatione:*

Ex puncto quolibet E in hypothenuſa AC trianguli rectanguli ACK erigatur recta verticalis EG, quae repraeſentet vim naturalem acceleratricem grauium quam vocabo g; ſuper ea formetur triangulum rectangulum EFG, cuius latus EF ſit perpendiculare ad AC, alterum GF eidem AC parallelum; ductae iam intelligantur FN, NL, LR, RS, ST, TV, etc. in infinitum, ea nimirum lege, vt prima, tertia, quinta etc. horizonti DH, ſecunda vero, quarta, ſexta &c. hypothenuſae AC ſint parallelae. Hinc omnia triangula EGF, EFN, ENL, ELR, etc. ſunt inter ſe et ipſi triangulo CAK ſimilia. Sit itaque huius trianguli altitudo $AK = a$, baſis $KC = b$, hypothenuſa $AC = \sqrt{(aa+bb)} = c$. Inuenietur per analogias $GF = \frac{ga}{c}$, $NL = \frac{gabb}{c^3}$, $RS = \frac{gab^4}{c^5}$, $TV = \frac{gab^6}{c^7}$, etc. et ita porro: $EN = \frac{gbb}{cc}$, $ER = \frac{gb^4}{c^4}$; $ET = \frac{gb^6}{c^6}$, etc. atque ita deinceps, $FN = \frac{gab}{cc}$; $LR = \frac{gab^3}{c^4}$; $ST = \frac{gab^5}{c^5}$, etc. Et ſic deinceps, $FE = \frac{gb}{c}$; $LE = \frac{gb^3}{c^3}$, $SE = \frac{gb^5}{c^5}$, $VE = \frac{gb^7}{c^7}$, etc. et ſic ſemper. Quae ſeries procedunt ſingulae in progreſſione geometrica deſcendente in ratione cc ad bb. His praemiſſis, ita arguo: cum pondus m, quod nunc in E eſſe concipimus, continuo premat aequaliter hypothenuſam AC, ſitque eius vis acceleratrix GE ſeu g, qua nimirum ad deſcenſum verticalem animatur, atque in hac directione ſi nihil obſtaret actu deſcenderet: ſed cum triangu-

Fig. 2.

 lum

lum pro parte obſtet deſcenſui, et inde a preſſione corporis aliquam vim acceleratricem, ſecundum directionem horizontalem in ſe recipiat, videndum eſt quanta illa ſit, tum etiam quantam retineat corpus ſecundum directionem hypothenuſae, et qualis retrocedente triangulo oriatur in corpore vis acceleratrix per compoſitionem vtriusque quamque ideo viam AP corpus deſcribat a puncto A ad horizontalem DH. In hunc finem concipiatur vis GE reſolui in GF et FE; illa GF ſola eſſet acceleratrix ſecundum directionem hypotenuſae, ſi triangulum ACK eſſet immobile, vtpote a cuius inuincibili obſtaculo, vis altera normalis FE tota deſtrueretur: ſed quia triangulum eſt mobile, patet vim FE non omnino deſtrui, ſed tantum imminui, et quidem in ea ratione in qua aggregatum maſſae trianguli et maſſae corcorporis (quod aggregatum maſſarum vocabo M) maius eſt quam maſſa ſolius corporis *m*. Vnde ſi triangulum AKC cedere poſſet ſecundum directionem FE, foret per lemma 1. vis acceleratrix totius ſyſtematis h. e. tam trianguli quam corporis in hac directione, $= \frac{m}{M} \times FE$, manente interim etiam in corpore priore vi acceleratrice ſecundum directionem AC et expreſſa per GF. Sed quia triangulum non cedit ſecundum FE propter oppoſitionem plani immobilis horizontalis DH: reſoluenda eſt vis acceleratrix $\frac{m}{M} \times FE$, quatenus eſt in corpore, in FN et NE; et habebitur $\frac{m}{M} \times FN$

et

et $\frac{m}{M}\times NE$, quarum illa $\frac{m}{M}\times FN$ animat ſyſtema adeoque et ipſum triangulum ad retrocedendum ſecundum directionem horizontalem; haec autem $\frac{m}{M}\times NE$ porro reſoluta in NL et LE, dat $\frac{m}{M}\times NL$ et $\frac{m}{M}\times LE$, ex quibus illa $\frac{m}{M}\times NL$ contribuit cum priore GF ad motum corporis in directione AC, haec vero $\frac{m}{M}\times LE$ (quae contribuit ad animandum corpus *m* in directione LE, ipſi autem aſſociatur maſſa trianguli) ſimili modo tractanda eſt vt antea cum FE factum eſt; erit namque per Lemma 1. $\frac{m}{M}\times\frac{m}{M}\times LE$, ſeu $\frac{mm}{MM}\times LE$ noua pars vis acceleratricis qua totum ſyſtema h. e. corpus et triangulum ſecundum LE ſolicitaretur, ſi planum immobile DH non obſtaret; reſoluatur ergo haec vis $\frac{mm}{MM}\times LE$ in LR et RE, eritque $\frac{mm}{MM}\times LR$ et $\frac{mm}{MM}\times RE$, quarum illa $\frac{mm}{MM}\times LR$ dat nouam partem vis acceleratricis priori adiiciendam ad animandum ſyſtema ipſumque adeo triangulum in directione horizontali; haec vero $\frac{mm}{MM}\times RE$ vlterius reſoluta in RS et SE dat $\frac{mm}{MM}\times RS$ et $\frac{mm}{MM}\times SE$, quarum illa $\frac{mm}{MM}\times RS$ eſt iterum noua pars vis acceleratricis in corpore ad illud animandum in directione AC, ſed altera $\frac{mm}{MM}\times SE$ ope lemmatis 1. tractata dabit etiam nouam partem vis acceleratricis nempe $\frac{m^3}{M^3}\times ST$ qua triangulum in directione horizontali animatur; atque ita deinceps procedatur in infinitum. Quo facto liquet, omnes particulares acceleratrices ſecundum GF, NL, RS, TV,

TV, etc. ſimul ſumtas dare vim totalem acceleratricem qua corpus m ſecundum directionem hypotenuſae AC animatur, motuque vniformiter accelerato deſcendit; omnes vero particulares ſecundum GF, NL, RS, TV, etc. ſimul ſumtas, dare pariter vim acceleratricem totalem, qua triangulum vel ſi mauis totum ſyſtema retro vrgetur ſecundum directionem horizontali BH parallelam, ac proin etiam motu vniformiter accelerato mouetur. His itaque in vnum collectis habebimus has duas progreſſiones, erit nempe vis acceleratrix totalis in corpore m ſecundum AC, $= GF + \frac{m}{M} \times NL + \frac{mm}{MM} \times RS + \frac{m^3}{M^3} \times TV +$ etc. Et vis totalis acceleratrix totius ſyſtematis ſeu trianguli ſecundum $DH = \frac{m}{M} \times FN + \frac{mm}{MM} \times LR + \frac{m^3}{M^3} \times ST +$ etc. Subſtitutis iam valoribus ſupra inuentis linearum GF, NL, RS, nec non linearum FN, LR, ST, etc. obtinebitur vis prior pro accelerando corpore ſecundum $AC = \frac{ga}{c} + \frac{m}{M} \times \frac{gabb}{c^3} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^4}{c^5} + \frac{m^3}{M^3} \times \frac{gab^6}{c^7} +$ etc. Atque vis altera pro accelerando ſyſtemate ſecundum $DH = \frac{m}{M} \times \frac{gab}{cc} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^4}{c^4} + \frac{m^3}{M^3} \times \frac{gab^5}{c^6} +$ etc. Quae duae progreſſiones ſunt manifeſtae geometricae et deſcendentes in ratione Mcc ad mbb, adeoque ſunt ſummabiles: inuenitur nimirum ſumma progreſſionis prioris $= \frac{gacm}{ccM - bbm}$; ac ſumma poſterioris $= \frac{gabm}{ccM - bbm}$. Quod erat inueniendum pro vtriusque lege accelerationis.

Co-

Corollarium 1.

Quoniam $\frac{gacM}{ccM-bbm} : \frac{gabm}{ccM-bbm} = cM : bm$, erit vis acceleratrix corporis in directione hypothenuſae, ad eiusdem vt et trianguli vim acceleratricem in directione horizontali, in ratione compoſita ex ratione hypothenuſae ad baſin trianguli et ratione maſſae totius ſyſtematis ad maſſam corporis.

Corollarium 2.

Hinc quia corpus animatur ſimul duabus viribus acceleratricibus, vna ſecundum hypothenuſam, altera ſecundum horizontalem, quae ſe habent vt cM ad bm, ſi capiatur cP ita vt $cM : bm = c$ ſeu $AC : CP = \frac{mb}{M} = \frac{m}{M} \times CK$ ducaturque AP, erit per Lemma 2. AP via, quam corpus vtraque vi animatum, realiter deſcribit. Quod erat inueniendum pro ſecundo.

Corollarium 3.

Cum ſit $GP = \frac{mb}{M}$, erit $KP = \frac{Mb-mb}{M}$ adeoque $cP : KP = m : M-m$, hoc eſt, vt maſſa corporis ad maſſam trianguli, et cum per idem lemma 2. eo tempore, quo corpus ab A ad P deſcendit, triangulum ipſum retrocedat, per interuallum CP, ita vt apex trianguli C futurus ſit in eodem punP, manifeſtum eſt, ſi intelligatur tota quantitas materiae trianguli concentrata in ſupremo trianguli apice A, fore CP, cui aequalis erit diſtan-

tia quantitatis materiae collectae a perpendiculari AK, ad KP quae eſt diſtantia corporis ab eadem perpendiculari AK verſus plagam oppoſitam ei, verſus quam reperitur apex A, vt m ad $M-m$, h. e. in ratione reciproca maſſarum corporis et trianguli, idque cum ſemper ſe habeat vbicunque ſumatur punctum P in recta AP, liquet centrum commune grauitatis materiae trianguli concentratae et corporis deſcendere in eadem ſemper perpendiculari AK; per conſequens etiam ſi materia per totum triangulum diffuſa ſit, tamen commune centrum grauitatis totius ſyſtematis durante motu in eadem ſemper linea verticali deſcendere. Quam quidem proprietatem ex alio etiam principio generaliſſimo demonſtrare poſſum.

Corollarium 4.

Cum corpus aliquod graue, quod nempe vi acceleratrice naturali g animatur, libere deſcendens per altitudinem AK, ſeu a acquirat velocitatem in A deſignandam per $\sqrt{a}$, ſi inuenire velimus velocitatem trianguli vltimo acquiſitam, poſtquam nempe apex c percurrit ſpatium CP, faciendum eſt per Lemma 3. vt $\sqrt{g} \times \sqrt{a}$ ad $\sqrt{\frac{gabm}{ccM-bbm}} \times \sqrt{\frac{mb}{M}}$ ita $\sqrt{a}$ ad quartam $mb\sqrt{\frac{a}{ccM^2-bbmM}}$, quae erit $=$ velocitati finali trianguli; vt vero habeatur velocitas corporis in P, poſtquam nempe re ipſa ſpatium AP percurrit, quaerenda primo eſt longitu-

gitudo AP ſeu $\sqrt{(AK^2 + PK^2)}$ et reperietur $= \sqrt{\left(\frac{MMaa + MMbb - 2Mmbb + mmb^2}{MM}\right)} = \sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$; Nunc faciendum eſt per partem ſecundam lemmatis ſecundi vt cP ad AP, h. e. vt $\frac{mb}{M}$ ad $\sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$ ſeu vt mb ad $\sqrt{(MMcc - 2Mmbb + mmbb)}$ ita velocitas inuenta trianguli, quae eſt $mb\sqrt{\frac{a}{ccMM - bbMm}}$, ad velocitatem quaeſitam realem corporis in P quae itaque erit $= \sqrt{\left(\frac{MMacc - 2Mmabb + mmabb}{ccMM - bbMm}\right)}$ quod erat inueniendum pro primo.

Corollarium 5.

Hinc confirmatur conſeruatio virium vivarum, multiplicando enim quadratum velocitatis finalis trianguli per ipſius maſſam prouenit vis viva trianguli $= \frac{abbmmM - abbm^3}{ccMM - bbmM}$, atque multiplicando quadratum velocitatis actualis corporis in puncto P per maſſam ipſius, habebitur vis viua corporis $= \frac{accMMm - 2abbMmm + abbm^3}{ccMM - bbmM}$; adeoque ſumma vtriusque $= \frac{accMMm - abbMmm}{ccMM - bbMm} = am$, hoc eſt = vi viuae ſolius corporis m ſi libere ex A in K caderet. Q. E. D.

Corollarium 6.

Etiam hoc curioſitatis gratia ſolui poteſt problema, qualem nempe inclinationem dare, conueniat hypothenuſae AC, ita vt manentibus maſſis tam corporis quam trianguli vt et altitudine AK, triangulum velociſſime retro pellatur, ipſumque

 que

que adeo corpus in puncto P habeat minimam poſſibilem velocitatem; in hunc finem ex vi acceleratrice trianguli quae eſt $\frac{gabm}{ccM-bbm}$ ſeu (ſubſtituta $aa+bb$ pro cc) $\frac{gabm}{aaM+bbM-bbm}$ faciendum eſt maximum, ſupponendo literam b variabilem reliquas vero omnes inuariabiles, hoc pacto enim inuenitur per communem regulam de *maximis* et *minimis*, $b=a\sqrt{\frac{M}{M-m}}$; proinde $\sqrt{(M-m)}:\sqrt{M}=a:b$, hoc eſt, ſinus totus debet eſſe ad tangentem anguli KAC in ſubduplicata ratione maſſae trianguli ad maſſam totius ſyſtematis ſeu ad ſummam maſſarum trianguli et corporis. Vnde ſequitur, angulum KAC ſemirecto ſemper maiorem eſſe debere. Et nominatim ſi M ſit duplum ipſius m, id eſt, ſi maſſae trianguli ſit aequalis maſſae corporis, erit $a.b::1.\sqrt{2}$, ſeu vt latus quadrati ad diagonalem, id quod facit vt angulus KAC, ceu ex tabulis tangentium habetur, ſit quam proxime 54. grad. 44. min. qui etiam eſt angulus quem facere debet manubrium gubernaculi cum carina nauis, vt haec quam promtiſſime gyrari poſſit, ſicuti docui in meo Manuario Nautico Cap. V. art. 26. nec non angulus obliquitatis ſub quo globus aliquis elaſticus impingere debet in duos alios, qui iunctim ſumti habeant maſſam ipſi aequalem, ita vt hi quam celerrime a ſe inuicem recedant. Vid. Diſſert. meam Cap. XI. art. 14.

Scho-

Scholion.

Non inconſultum duco oſtendere, quomodo alia huiusmodi problemata per methodum noſtram hic expoſitam ſolui poſſint. Sit ex. gr. idem triangulum ACK grauitatis quidem expers, ſed datam quantitatem materiae nullius grauitatis in ſe continens; quod moueri poſſit ſuper plano inclinato DH ad horizontem. Hypothenuſa CA ſupponitur horizontalis, latus AK perpendiculare ad baſin CK, incumbat vero hypothenuſae AC corpus graue E, libertatem habeat fluendi ſuper AC ſine omni frictione; ſicuti triangulum materiale non graue ACK ſupponitur fluere poſſe liberrime ſuper plano decliui DH. Quaeritur, ſi hoc triangulum a pondere corporis incumbentis preſſum deſcenderit, ac ſimul cum eo ipſum quoque corpus, qualem quouis in loco velocitatem habeat tam corpus quam triangulum. Fig. 4.

Solutio.

Quod attinet ad motum corporis E, haud difficulter intelligitur, illum continuo fieri in eadem verticali GE. Sed vt determinemus vim acceleratricem qua deſcendit triangulum ſuper plano decliui DH; rem ita praeſtabimus. Per GE exponatur grauitas ſeu vis naturalis acceleratrix corporis E, quae vt ante dicatur $=g$; reſoluatur ea in GF parallelam plano DH et in EF eidem normalem. Sit quoque hypothenuſa AC $=c$,

 AK =

AK$=a$, CK$=b$; maſſa corporis $=m$, maſſa totius ſyſtematis $=$ M, adeoque maſſa trianguli $=$ $M-m$. Erit ob ſimilia triangula GEF et ACK, GF$=\frac{ga}{c}$ et EF$=\frac{gb}{c}$. Concipiamus tantisper ceſſare vel demtam eſſe vim GF, et ſolam agere vim FE; habebimus caſum praecedentem, vbi DH tanquam linea horizontalis, et TE tanquam vis verticalis conſiderari debet; hinc ergo per Solutionem praec. inueniemus vim acceleratricem trianguli ACK ſecundum directionem DH; cui nunc ea, quam neglеximus, iterum addi debet quae ex GF reſultat, vtpote quae cum parallela ſit plano eidem DH, tota impenditur ad pellendum ſyſtema in directione DH; cognita ſic velocitate trianguli, cognoſcitur etiam velocitas realis corporis in E ſecundum directionem GE. Retentis itaque iisdem litteris, ponendum eſt $\frac{gbm}{cM}$ pro g in $\frac{gabm}{ccM-bbm}$ quod vim acceleratricem trianguli denotabat in praecedenti caſu, et prodibit $\frac{gabmm}{c^3MM-bbcMm}$ pro vi acceleratrici qua triangulum animatur reſultante tantum ex FE in praeſenti caſu; huic nunc addendum eſt, quod inſuper acquirit a GF $=\frac{ga}{c}$, quod ideo eſt $\frac{gam}{cM}$; vnde emergit trianguli vis acceleratrix totalis $=\frac{gabbmm}{c^3MM-bbcMm}+\frac{gam}{cM}=\frac{gacm}{ccM-bbm}$. Quare faciendo hic etiam per Lem. 3. vt $\sqrt{ga}$ ad $\sqrt{\left(\frac{gabbmm}{ccMM-bbMm}+\frac{gam}{M}\right)}$, ita $\sqrt{a}$ ſeu velocitas naturalis acquiſita ex caſu libero per altitudinem aequalem ipſi AK ad velocitatem trianguli poſtquam apex C percurrit ſpatium ſuper DH aequale ipſi c ſeu

ſeu hypothenuſae AC, quae itaque velocitas erit $= c\sqrt{\frac{am}{ccM - bbm}}$. Eſt autem CA ad AK ſeu c ad a vt modo inuenta trianguli velocitas ſuper plano DH ad actualem ſeu realem velocitatem corporis in directione verticali GE; vnde velocitas corporis $= a\sqrt{\frac{am}{ccM - bbm}}$. Quod erat inueniendum pro determinandis velocitatibus.

Corollarium.

Etiam ex hac, vt ex praecedente ſolutione a priori inſtituta mirifice confirmatur conſeruatio virium viuarum; etenim vis viua trianguli $= \frac{accm \times (M - m)}{ccM - bbm}$, et vis viua corporis $= \frac{a^3 mm}{ccM - bbm}$, quarum ſumma (inſtituto calculo) inuenitur $= am$, quemadmodum fieri par eſt, vt conſeruetur vis viua, quae eſſet in corpore libere deſcendente per altitudinem verticalem aequalem ipſi AK. Reducendo velocitates ad communem denominatorem inuenitur velocitas trianguli $= \frac{c\sqrt{aM}}{\sqrt{(ccH - bbm)}}$ et velocitas corporis $= \frac{a\sqrt{am}}{\sqrt{(ccM - bbm)}}$.

NOTA. Si praeterea velimus, vt ipſum quoque triangulum AKC grauitet pro ratione ſuae maſſae $M - m$; eodem ratiocinio, quo ante in ſolutione ſcholio ſubiuncta fecimus, vtendum eſt, niſi quod iam per GE exponenda ſit grauitas ſeu vis naturalis acceleratrix in directione verticali non tantum corporis E, ſed totius ſyſtematis; corpus quippe et triangulum in hoc caſu communem habent grauitationem naturalem. Hinc

ergo

ergo iam ipſa G F ſeu $\frac{ga}{c}$ deſignabit partem vis acceleratricis totius ſyſtēmatis et proinde trianguli, quam tantisper ceſſare vel demtam eſſe concipiamus, dum altera tantum EF ſeu $\frac{gb}{c}$ ſyſtema totum proinde etiam corpus vrget normaliter ad planum DH. Atque ita habebimus caſum primum, vbi DH tanquam horizontalis et FE tanquam vis acceleratrix verticalis qua corpus animatur, conſideranda eſt. Quare ſi in $\frac{gabm}{ccM-bbm}$ (quod in illo primo caſu exprimebat vim acceleratricem totalem trianguli) ponamus $\frac{gb}{c}$ pro g, orietur $\frac{gabbm}{c^3M-bbcm}$ pro vi qua triangulum animatur reſultante tantum ex FE in hoc caſu. Ei igitur addenda nunc eſt vis altera partialis, quam hactenus neglegimus, oriunda ex GF, quam vim modo vidimus eſſe $\frac{ga}{c}$. Et ita obtinemus pro praeſenti caſu vim acceleratricem totalem trianguli $= \frac{gabbm}{c^3M-bbcm} + \frac{ga}{c} =$ (facta reductione) $\frac{gacM}{ccM-bbm}$. Faciendo nunc per Lemma 3. vt $\sqrt{ga}$ ad $\sqrt{(\frac{gaccM}{ccM-bbm})}$ ita $\sqrt{a}$ ſeu velocitas naturalis acquiſita ex deſcenſu libero per altitudinem aequalem ipſi AK ad velocitatem trianguli, quam habebit poſtquam percurrit ſpatium aequale ipſi c ſeu hypothenuſae AC; quare ergo velocitas erit $= \sqrt{(\frac{accM}{ccM-bbm})}$; faciendo nunc porro vt CA ad AK ſeu c ad a, ita modo inuenta velocitas trianguli $\sqrt{\frac{accM}{ccM-bbm}}$ ad $\sqrt{\frac{a^3M}{ccM-bbm}}$ quae erit velocitas realis corporis in directione verticali GE Q. E. I.

Co-

Corollarium.

Hinc quoque patet conſeruari quantitatem virium viuarum: nam vis viua trianguli $= \frac{accM}{ccM - bbm} \times (M - m) = \frac{accM^2 - accMm}{ccM - bbm}$ et vis viua corporis $= \frac{a^3Mm}{ccM - bbm}$, quae ſimul ſumtae faciunt $\frac{accM^2 - accMm + a^3Mm}{ccM - bbm} =$ (ob $cc - aa = bb$) $\frac{accM^2 - abbMm}{ccM - bbm} = aM =$ vi viuae quam acquireret totum ſyſtema graue, ſi libere ex altitudine verticali et aequali ipſi AK ſeu a caderet. Q. E. D.

PROBLEMATA TRIGONO-SPHAERICA TRIA

AVCTORE

F. C. *Maiero.*

Problema I.

IN *triangulis ſphaericis* ZSP *et* ZTP, *communem baſem* PZ, *et aequalia latera* PS *et* PT *habentibus, dantur latera* ZS *et* ZT, *et anguli ad* P: *quaeruntur reliqua.* Tabula I. Fig. V.

Solutio.

Sit ſinus lateris ZS $= A$, eiusque coſinus $= C$

— — — ZT $= a$ — — $= c$.

Sinus anguli ZPS = P eiusque coſinus = Q
— — ZPT = p — — = q
— laterum PS, PT = t — — = z
— baſis ZP = x — — = y

Quoniam hoc pacto omnia triangulorum latera denominata ſunt, angulorum ad P coſinus exprimere licet per regulam a me ſaepius allegatam atque ita aequationes formare vti ſequitur.

1. $r\frac{rC-yz}{tx} = Q$ item $r\frac{rc-yz}{tx} = q$
2. $\frac{rC-yz}{Z} = \frac{tx}{r}$ — $\frac{rc-yz}{q} = \frac{tx}{r}$.

Ex binis hisce fit

3. — — $rqC - qyz = rQc - Qyz$
4. — — $yz = r\frac{Qc-qC}{Q-q}$

Si ſint ſinus ſemiſummae angulorum ad P = M, et ſinus ſemidifferentiae = N, erit $Q - q = \frac{2MN}{r}$ adeoque

5. — $yz = rr\frac{Qc-qC}{2MN}$.

Ex aequationibus primis formantur quoque

6. $rC - yz = \frac{Qtx}{r}$ — — $rc - yz = \frac{qtx}{r}$

exinde

7. $yz = \frac{rrC-Qtx}{r}$, $yz = \frac{rrc-qtx}{r}$

Ex binis his habetur

8. — $rrC - Qtx = rrc - qtx$
9. — $tx = rr\frac{C-c}{Q-q}$

Ponatur ſinus ſemiſummae laterum ZS et ZT = m et ſinus ſemidifferentiae = n. erit $C - c = \frac{2mn}{r}$ adeoque

10. $tx = \frac{rrmn}{MN}$.

Ex

Ex regulis aliis, mihi ſaepe allegatis, conſtat eſſe coſinum ſummae laterum quaeſitorum (PZ et PS) $= \frac{yz-tx}{r}$ et coſinum differentiae eſſe $= \frac{yz+tx}{r}$. Subſtituantur ergo ex aequationibus 5 et 10. valores aequiualentes, vt prodeant duae regulae vna pro ſumma quaeſitorum, altera pro differentia, quibus repertis ipſa quaeſita, vti notum eſt, habentur.

Eſt igitur

11. $\frac{yz-tx}{r} = \frac{(r+Q)c-(r+q)C}{2MN} r = \frac{(r+Q)c-(r+q)C}{Q-q}$

Ponatur tangens ſemianguli $ZPS = T$ et tangens ſemianguli $ZPT = t$, erit $r+Q = \frac{rP}{T}$ et $r+q$ $\frac{rp}{t}$, quibus ſuffectis habetur coſinus ſummae vt ſequitur:

12. $\frac{yz-tx}{r} = rr \frac{Ptc-pTC}{2MNTt}$.

Coſinus differentiae eodem modo definitur.

13. $\frac{yx+tx}{r} = r \frac{(r-q)C-(r-Q)c}{2MN} = r \frac{(r-q)C-(r-Q)c}{Q-q}$

Retentis ſemiangulorum tangentibus T et t ſupra adhibitis erit $r-q = \frac{tp}{r}$ et $r-Q = \frac{TP}{r}$ quibus ſurrogatis, prodit coſinus

14. $\frac{yz+tx}{r} = \frac{tpC-TPc}{2MN}$.

Hisce regulis inueniuntur ſumma et differentia laterum quaeſitorum, ex iſtis vero duo numeri quibus latera quaeſita definiuntur: ſed incertum eſt vter numerus vtri lateri tribuendus ſit. In caſibus tamen ſpecialibus ſemper patet quomodo diſtribuendi ſint.

Iacobus Bernoulli Problema in Tractatu *de Cometis* propoſuit, quod non niſi ſpecialis caſus eſt praeſentis problematis; ponit nimirum arcum $ZT = 90^{\circ}$, adeoque $c = 0$. item angulum $ZPS = 90^{\circ}$, et per conſequens $Q = 0$. inde fit angulus ZPT quadrante maior vt pro q ponendum ſit $-q$. et r ſit $= -r$ $\frac{yz - tx}{r} = \frac{-rpC}{tq} = \frac{-BC}{t}$ (poſito $\frac{rp}{q} = B$ = tangenti anguli ZPT.) item $\frac{yz + tx}{r} = \frac{tpC}{rq} = \frac{tBC}{rr}$. Inde patet quam facilis calculus requiratur ad ſolutionem problematis *Bernoulliani*.

Problema Trigonometricoſphaer. II.

Fig. VI. 1. *In triangulis Sphaericis* SPZ *et* sPZ *baſin* PZ *et angulum ad* Z *communes habentibus, ſint dati anguli omnes ad* P, *itemque latera* PS *et* Ps: *quaeruntur reliqua.*

Solutio.

Sit igitur

Sinus lateris $PS = A$, et coſinus $= C$.
— — $Ps = a$, — — $= c$.
Sinus anguli $ZPS = P$, et coſinus $= Q$.
— — $ZPs = p$, — — $= q$.
Sinus baſeos $PZ = x$ et coſinus $= y$ et tangens $= T$
Sinus anguli ad $Z = t$ — — $= z$.

Per notam inter ſinus laterum et ſinus angulorum oppoſitorum analogiam, habetur ſinus lateris

teris $ZS = \frac{AP}{t}$, ponatur autem breuitatis gratia $= f$, eiusque coſinus $= g$.

Quoniam hoc modo in triangulo SPZ omnia latera denominata ſunt, erit (per regulam a me in II. Tom. Comment. pag. 24. traditam)

1. $z = \frac{rC - gy}{fx} r$ adeoque

2. $\frac{rrC - fzx}{y} = rg$

et porro per eandem regulam

3. $Q = r \frac{rg - Cy}{Ax}$ et inde

4. $rg = \frac{AQx + rCy}{r}$.

Ex 2da et 4ta fit

5. $rrrC - rfzx = AQxy + rCyy$.

ſubſtituatur $yy = rr - xx$.

6. $rrrC - rfzx = AQxy + rrrC - rCxx$.

deletis aequalibus, factaque diuiſione per x.

7. $rfz = rCx - AQy$.

et quia $f = \frac{AP}{t}$, fit

8. $\frac{rz}{t} = \frac{rCx - AQy}{AP}$.

Eadem operatio in altero triangulo PZs reddit

9. $\frac{rz}{t} = \frac{rcx - aqy}{ap}$, ſic ex 8va et 9na fit

10. $rAPcx - rapCx = -AQapy + aqAPy$

atque ita

11. $\frac{rx}{y} = T = Aa \frac{Pq - pQ}{APc - apC}$ Q. E. I.

2. Vt regula inuenta breuis reddatur, notandum eſt, quod $\frac{Pq - pQ}{r}$ ſit ſinus anguli SPs, hunc ponam $= b$, ita fit $rb = Pq - pQ$; quo ſubſtituto, regula eſt $= \frac{rbAa}{APc - apC}$. Praeterea diuiſione per Aa,

 obti-

obtinebitur $\frac{rbAa}{APc-apC}=\frac{rb}{\frac{Pc}{a}-\frac{pC}{A}}$. Sumta deinde N pro cotangente lateris PS, et n, pro cotangente lateris Ps, erit $\frac{N}{r}=\frac{C}{A}$ et $\frac{n}{r}=\frac{c}{a}$, quibus ſurrogatis, regula tandem ſimpliciſſima habetur $=\frac{rrb}{Pn-pN}$ ſiue potius $\frac{rrb}{pN-Pn}$. Quia in aequatione 11. debuiſſet fieri $T=\frac{pQ-Pq}{apC-APc}Aa$.

3. Per problema hoc inuenitur altitudo poli PZ, ex datis duarum ſtellarum declinationibus, earumque tranſitibus per verticalem communem ZSs: (namque ex hiſce noti fiunt anguli ad P horarii). Inueniuntur quoque, azimutum PZs, et altitudines verae ZS, Zs.

4. Si declinationes ſtellarum incognitae fuerint, poterit ratio inueniri, quam habent tangentes declinationum; ſcilicet, earundem ſtellarum tranſitus obſeruentur quoque per alium verticalem ZMN a priore diuerſum. Ponatur in hoc altero tranſitu ſinus anguli $ZPM=M$, et ſinus anguli $ZPN=m$, item ſinus anguli $MPN=d$. Quoniam in vtroque caſu latus PZ manet inuariabile erit

1. $\frac{rrb}{pN-Pn}=\frac{rrd}{mN-Mn}$.

2. $pdN-Pdn=bmN-bMn$.

3. $(pd-bm)N=(Pd-bM)n$.

adeoque

$N:n=(Pd-Mb):(pd-mb)$. Q. E. I.

5. Quod

5. Quod ſi vnius ſtellae cognita eſt declinatio, inuenitur alterius declinatio per problema praeſens; quod quidem per ſe patet.

Problema Trigonometricoſphaer. III.

1. *In triangulis Sphaericis* PZS *et* PZs, *communem baſin* PZ, *et latera* ZS, Zs *aequalia habentibus, ſunt cogniti anguli ad* P, *et latera* PS, Ps; *quaeruntur reliqua.* Fig. VII.

Solutio.

Sit ſinus lateris PS $=$ A, coſinus $=$ C.
— — Ps $= a$, — $= c$.
coſinus anguli SPZ $=$ Q.
— — sPZ $= q$.
coſinus lateris ZS ($=$ Zs) $= y$.
ſinus baſeos ZP $= t$, coſinus $= z$ et cotangens $= v$

Cum in triangulo SZP denominata ſint omnia latera, per ea definitur coſinus anguli SPZ, ſcilicet

1. $Q = \frac{ry - Cz}{Ac} r.$
2. $AQt + rCz = = rry.$

eodem modo eſt

3. $q = \frac{ry - cz}{at} r$, et
4. $atq + rcz = rry$. Sic ex 2da et 4ta fit
5. $(AQ - aq)t = r(c - C)z$
6. $\frac{AQ - aq}{c - C} = \frac{rz}{t} = v.$ Q. E. I.

2. Vt

2. Vt regula breuis fiat, ponatur ſinus ſemiſummae laterum PS, Ps, eſſe $= f$, et ſinus ſemidifferentiae $= g$, ita habetur $c - C = \frac{2fg}{r}$, quo valore ſuffecto regula abit in hanc $r \frac{AQ - aq}{2fg}$.

3. Per hoc problema innoteſcit altitudo poli, ex cognitis duarum ſtellarum declinationibus, earumque tranſitibus per communem (ignotam licet) altitudinem.

4. Si declinationes cognitae non ſunt, poterit ratio inueniri quae eſt inter coſinus declinationum, obſeruando nimirum earundem ſtellarum tranſitus per alium a priore diuerſum Almucantarat. Ponamus tum eſſe coſinum anguli TPZ $= M$ et coſinum anguli tPZ $= m$, erit

1. $r \frac{AQ - aq}{2fg} = r \frac{AM - am}{2fg}$. ſiue
2. $AQ - AM = aq - am$.
3. $A : a = (q - m) : (Q - M)$. Q. E. I.

5. Si fiat ſinus ſemiſummae angulorum SPZ et TPZ $= K$, et ſemidifferentiae $= L$. Item ſinus ſemiſummae angulorum sPZ et tPZ $= k$ et ſinus ſemidifferentiae $= l$, erit $Q - M = \frac{2KL}{r}$, et $q - m = \frac{2kl}{r}$, adeoque prior analogia abit in hanc

$$A : a = kl : KL.$$

6. Data vnius ſtellae declinatione, inuenitur hac methodo declinatio alterius; inuenitur enim ratio coſinuum declinationum vtriusque ſtellae.

Sin-

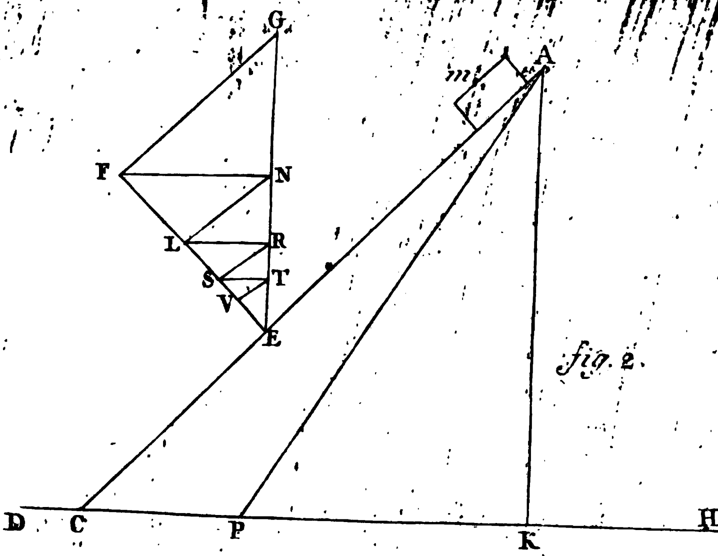


fig. 2.



fig. 3.

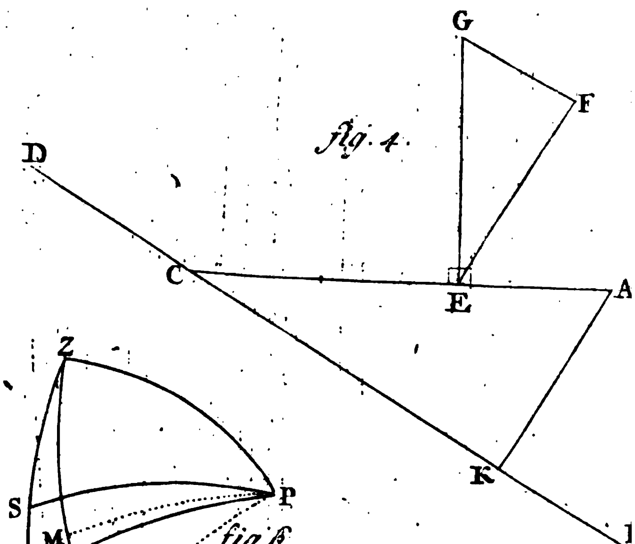


fig. 4.



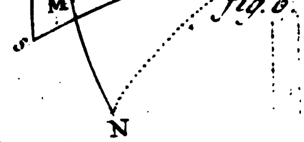


fig. 6.

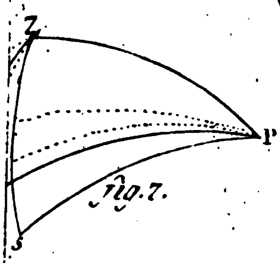


fig. 7.

SINGVLARIS MODVS OBSERVANDI SIDERVM DECLINATIONES ET ALTITVDINEM POLI.

AVCTORE

F. C. Maiero.

1.

DEclinationum inuentio cognitam poli altitudinem vulgo ſupponit, et viciſſim altitudinis polaris inuentio requirit ſtellae alicuius declinationem notam; turbantur et eiusmodi inquiſitiones a refractionibus. Incommodis hinc mederi conatus ſum, modum nuper (d. 29. Maii 1729.) oſtendens, qui praeter obſeruationis poſſibilitatem nil ſupponit; viſa tamen eſt bonitati methodi officere azimuta obſeruandi difficultas. Hanc igitur euitare ſtudui, nouumque modum excogitaui quo paria praeſtare licet. Eum nunc deſcribam. Tabula II.

2. Eligantur duo circuli verticales, ignota licet azimuta, itemque duo almucantarati quorum itidem altitudines ſcire neceſſe non eſt; ſint igitur duae ſtellae ignotarum declinationum, quae per quatuor iſtos circulos motu diurno tranſire poſſunt; obſeruentur momenta tranſituum, item-

que culminationes, vt hoc pacto innoteſcant anguli horarii ad polum.

Fig. 1. Ex. gr. ZO et ZR ſunt verticales, quorum azimuta HO et HR ignota ſunt. AB et BC ſunt duo almucantarati, quorum altitudines AH et BH ignotae ſunt quoque. DI et ES ſunt paralleli duarum ſtellarum; *f*, *g*, *l* et *k* ſunt transitus ſtellarum per verticales, quorum momenta obſeruare oportet ope horologii; *m*, *n*, *p*, *q*, ſunt transitus ſtellarum per almucantaratos quos notare itidem oportet. Factis hisce obſeruationibus, noti fiunt anguli horarii ad P, quos formant declinationum complementa P*f*, P*g*, P*l*, P*b*, P*m*, P*n*, P*p* et P*q*, cum altitudine aequatoris PZ.

3. Ex cognitis angulis horariis ad P eruitur ratio quam habent tangentes declinationum quaeſitarum, itemque ratio quae eſt inter coſinus earundem declinationum, ex datis autem duabus rationibus hisce ipſi coſinus vel tangentes, declinationum quaeſitarum elicientur, ſicuti ex problemate ſequente palam fiet.

4. Datis rationibus quas habent duorum arcuum coſinus ad inuicem, itemque tangentes; inuenire ipſos coſinus et tangentes arcuum.

Sit ratio coſinuum $= a : b$, et tangentium $= m : n$, coſinus arcus primi ſit $= x$, adeoque coſi-

nus

nus ſecundi $= \frac{bx}{a}$, conficitur inde tangens primi $= \frac{r\sqrt{rr-xx}}{x}$ ſecundi $= \frac{r\sqrt{rraa-bbxx}}{bx}$. et porro analogia

1. $m : n = \frac{r\sqrt{rr-xx}}{x} : \frac{r\sqrt{rraa-bbxx}}{bx}$

2. $m\sqrt{rraa-bbxx} = bn\sqrt{rr-xx}$.

3. $mmrraa - bbrrnn = mmbbxx - nnbbxx$.

$\frac{r\sqrt{aamm-bbnn}}{b\sqrt{mm-nn}} = x$. Q. E. I.

5. Declinationibus ſic inuentis, poli altitudo eruitur porro per ea quae alibi tradidi. Quin et verticalium vſurpatorum azimuta, et almucantaratorum altitudines prono calculo definiuntur, quorum aliquis vſus ad refractiones manifeſtandas et ad alias obſeruationes faciendas eſſe poteſt.

6. Apparatus ad obſeruationes huc pertinentes fere nullus eſt. Varia quidem poſſunt excogitari artificia, quibus verticales et almucantarati requiſiti conſtituuntur, vt ſtellarum ad eos appulſus notari poſſit, ſed multis non eſt opus; fila pendentia aut baculi perpendiculariter erecti, ferrei, rotundi, repraeſentant verticales, quorum vnus dioptris tychonicis verſatilibus inſtructus eſt, quae pauca obſeruationi tranſituum per verticales abunde ſatisfaciunt; tranſitus autem per Almucantaratos vulgari quadranti nullo fere negotio obtinentur. Solum horologium ſupereſt quo menſura aliqua capitur certa, et ex qua declinationes, polique altitudo eliciuntur. Quo ipſo patet methodum hanc nec a refractionibus turbari, nec cognitas aliarum rerum menſuras ſupponere, nec tandem obſeruationum difficultate premi.

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCENDENTIBVS, SEV QVARVM TERMINI GENERALES ALGEBRAICE DARI NEQVEVNT.

Auct. L. *Eulero.*

1.

Cum nuper occaſione eorum, quae Cel. *Goldbach* de ſeriebus cum Societate communicauerit, in expreſſionem quandam generalem inquirerem, quae huius Progreſſionis $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 +$ etc. terminos omnes daret; incidi conſiderans, quod ea in infinitum continuata tandem cum geometrica confundatur in ſequentem expreſſionem, $\frac{1.\ 2^n}{1+n}\cdot\frac{2^{1-n}3^n}{2+n}\cdot\frac{3^{1-n}4^n}{3+n}\cdot\frac{4^{1-n}5^n}{4+n}\cdot$ etc. quae dictae progreſſionis terminum ordine n exponit. Ea quidem in nullo caſu abrumpitur, neque ſi n eſt numerus integer neque ſi fractus, ſed ad quemuis terminum inueniendum tantummodo approximationes ſuppeditat, niſi excipiantur caſus $n = 0$, et $n = 1$, quibus ea actu abit in 1. Ponatur $n = 2$, habebitur $\frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{5.5}{4.6}$ etc. $=$ termino ſecundo 2. Si $n = 3$ habebitur $\frac{2.2.2}{1.1.4}\cdot\frac{3.3.3}{2.2.5}\cdot\frac{4.4.4}{3.3.6}\cdot\frac{5.5.5}{4.4.7}$ etc. $=$ termino tertio 6.

§. 2. Quanquam autem haec expreſſio nullum vſum habere videatur in inuentione terminorum

norum; tamen ad interpolationem eius ſeriei, ſeu ad terminos, quorum indices ſunt numeri fracti egregie accommodari poteſt. De hoc autem hic explicare non conſtitui, cum infra magis idonei modi occurrant ad idem efficiendum. Id tantum de iſto termino generali afferam, quod ad ea, quae ſequuntur quaſi manuducat. Quaeſiui terminum cuius index $n = \frac{1}{2}$, ſeu qui aequaliter interiacet inter primum 1, et praecedentem qui itidem eſt 1. Poſito autem $n = \frac{1}{2}$, aſſecutus ſum ſeriem $\sqrt{\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9}}$ etc. quae terminum quaeſitum exprimit. Haec autem ſeries ſimilis mihi ſtatim viſa eſt eius, quam in *Walliſii* opeperibus pro area circulari vidiſſe memineram. Inuenit enim *Walliſius* circulum eſſe ad quadratum diametri vt 2.4.4.6.6.8.8.10 etc. ad 3.3.5.5.7.7.9.9. etc. Si igitur fuerit diameter = 1, erit circuli area = $\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7}$ etc. Ex huius igitur cum mea conuenientia concludere licet, terminum indicis $\frac{1}{2}$ eſſe aequalem radici quadratae ex circulo, cuius diameter = 1.

§. 3. Arbitratus eram ante ſeriei 1, 2, 6, 24, etc. terminum generalem, ſi non algebraicum tamen exponentialem dari. Sed poſtquam intellexiſſem terminos quosdam intermedios a quadratura circuli pendere, neque algebraicas neque exponentiales quantitates ad eum exprimendum idoneas eſſe cognoui. Terminus enim generalis eius

progreſſionis ita debet eſſe comparatus, vt tum quantitates algebraicas tum a quadratura circuli tum forte ab aliis quoque quadraturis pendentes comprehendat; id quod in nullam formulam nec algebraicam nec exponentialem competit.

§. 4. Cum autem conſideraſſem, dari inter quantitates differentiales eiusmodi formulas, quae certis in caſibus integrationem admittant et tum quantitates algebraicas praebeant, in aliis vero non admittant et tum quantitates a quadraturis curuarum pendentes exhibeant; animum ſubiit huiusmodi forte formulas ad progreſſionis memoratae aliarumque eius ſimilium terminos generales ſuppeditandos aptas eſſe. Progreſſiones vero, quae tales requirunt terminos generales, qui algebraice dari nequeunt, voco transcendentes; quemadmodum Geometrae omne id, quod vires communis Algebrae ſuperat, transcendens appellare ſolent.

§. 5. Id ergo meditatus ſum, quomodo formulas differentiales ad progreſſionum terminos generales exprimendos accommodari maxime conueniat. Terminus autem generalis eſt formula, quam ingrediuntur tum quantitates conſtantes, tum alia quaepiam non conſtans vt n, quae ordinem terminorum ſeu indicem exponit: vt ſi tertius terminus deſideretur oporteat loco n ponere 3. Sed in formula differentiali quantitatem quandam variabilem

riabilem ineſſe oportet. Pro qua non conſultum eſt adhibere n, cum eius variabilitas non ad integrationem pertineat: ſed poſtquam ea formula integrata eſt vel integrata eſſe ponitur, tum demum ad progreſſionem formandam inſeruiat. In formula igitur differentiali inſit oportet quantitas quaedam variabilis x, quae autem poſt integrationem alii ad progreſſionem ſpectanti aequalis ponenda eſt; et quod oritur, proprie eſt terminus, cuius index eſt n.

§. 6. Vt haec clarius concipiantur, dico $\int p\,dx$ eſſe terminum generalem progreſſionis ſequenti modo ex eo eruendae; denotet autem p functionem quamcunque ipſius x, et conſtantium in quarum numero adhuc ipſum n haberi debet. Concipiatur $p\,dx$ integratum talique conſtante auctum, vt facto $x=o$ totum integrale euaneſcat, tum ponatur x aequale quantitati cuidam cognitae. Quo facto in inuento integrali nonniſi quantitates ad progreſſionem pertinentes ſupererunt, et id exprimet terminum, cuius index $=n$. Seu integrale dicto modo determinatum erit proprie terminus generalis. Si quidem id haberi poteſt, non opus eſt formula differentiali, ſed progreſſio inde formata habebit terminum generalem algebraicum; ſecus res ſe habet ſi integratio non ſuccedit, niſi certis numeris loco n ſubſtitutis.

§. 7. Aſſumſi igitur plures huiusmodi formulas differentiales integrationem non admittentes

niſi

niſi ſi ponatur loco n numerus integer affirmatiuus, vt ſeriei termini principales fiant algebraici: et inde progreſſiones formaui. Earum itaque termini generales in promtu erunt, et a quanam quadratura quique eius termini intermedii pendeant definire licebit. Hic quidem non plures eiusmodi formulas percurram; ſed vnicam tantum aliquanto generaliorem pertractabo, quae valde late patet, et ad omnes progreſſiones, quarum quilibet termini ſunt facta conſtantia ex numero factorum ab indice pendente accommodari poteſt; quiq; factores ſunt fractiones, quarum numeratores et denominatores in progreſſione quacunque arithmetica progrediuntur, vt: $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} +$ etc.

§. 8. Sit propoſita haec formula $\int x^e dx(1-x)^n$ vicem termini generalis ſubiens, quae integrata ita, vt fiat $=0$, ſi ſit $x=0$; et tum poſito $x=1$, det terminum ordine n progreſſionis inde ortae. Videamus ergo qualem ea ſuppeditet progreſſionem. Eſt $(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3$ etc. Et propterea $x^e dx(1-x)^n = x^e dx - \frac{n}{1}x^{e+1} dx + \frac{n.n-1}{1.2}x^{e+2}dx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{e+3}dx$ etc. Quare $\int x^e dx(1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{n.x^{e+2}}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1..x^{e+3}}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2.x^{e+4}}{1.2.3.(e+4)}$ etc. Ponatur $x=1$, quia conſtantis additione non eſt opus, et habebitur $\frac{1}{e+1}$

$\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3(e+4)} +$ etc. terminus generalis ſeriei inueniendae. Quae talis erit, vt ſi $n=0$, prodeat terminus $= \frac{1}{e+1}$; ſi $n=1$ term. $= \frac{1}{(e+1)(e+2)}$, ſi $n=2$, term. $= \frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$ ſi $n=3$. prodeat terminus $= \frac{1.\ 2.\ 3.}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ lex qua hi termini progrediuntur manifeſta eſt.

§. 9. Hanc ergo aſſecutus ſum progreſſionem $\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)} + \frac{1.2.3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ etc. cuius terminus generalis eſt $\int x^e dx(1-x)^n$. Termini vero ordine n ipſius haec erit forma $\frac{1.2.3.4\ldots n}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n+1)}$. Haec quidem forma ſufficit ad terminos indicum integrorum inueniendos, ſed ſi indices non fuerint integri, ex ea ipſi termini inueniri nequeunt. His autem proximis inueniendis inſeruit haec ſeries $\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1}{1.2(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.(e+4)} +$ etc. Si $\int x^e dx(1-x)^n$ multiplicetur per $e+n+1$, habebitur progreſſio cuius terminus ordine n hanc formam habet $\frac{1.2.3\ldots n}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n)}$, cuius igitur verus terminus generalis erit $(e+n+1)\int x^e dx(1-x)^n$. Hic obſeruandum eſt, progreſſionem ſemper fieri algebraicam, quando loco e aſſumatur numerus affirmatiuus. Ponatur e. g. $e=2$, progreſſionis terminus n erit $\frac{1.2.3\ldots n}{3.4.5\ldots(n+2)}$ ſeu $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$. Id quod ipſe terminus generalis quoque indicat, qui erit $(n+3)\int xxdx(1-x)^n$. Nam eius integrale eſt $C - \frac{(1-x)^{n+1}xx}{n+1} - \frac{2x(1-x)^{n+2}}{\ldots}$

 $-(1-x)$

$-\frac{(1-x)^{n+3}}{n+3}\Big)(n+3)$, vt hoc fiat $=0$ ſi $x=0$, erit $C=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$. Ponatur $x=1$, erit terminus generalis $\frac{n+3}{n+1}-\frac{2(n+3)}{n+2}+1=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

§. 10. Vt igitur progreſſiones transcendentes adipiscamur, ponatur e aequale fractioni $\frac{f}{g}$. Erit progreſſionis terminus ordine n $=$ $\frac{1.\,2.\,3.\,-\,-\,-\,-\,n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\,-\,-\,(f+ng)}g^n$ ſiue $\frac{g.\,2g.\,3g.\,-\,-\,-\,ng}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\,-\,-\,(f+ng)}$. Terminus vero generalis erit $=\frac{(f+(n+1)g)}{g}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$. Qui ſi diuidatur per g^n, erit pro progreſſione $\frac{1}{f+g}+\frac{1.\,2}{(f+g)(f+2g)}+\frac{1.\,2.\,3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}$ etc. cuius terminus ordine n eſt $\frac{1.\,2.\,3.\,-\,-\,-\,-\,n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\,-\,-}$. Eius progreſſionis igitur terminus generalis erit $\left(\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\right)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$. Vbi ſi fractio $\frac{f}{g}$ non ſit numero integro aequalis, ſeu ſi f ad g non habuerit rationem multiplicem, progreſſio erit transcendens, et termini intermedii a quadraturis pendebunt.

§. 11. Exemplum quoddam in medium afferam, vt vſus termini generalis clarius ob oculos ponatur. Sit in paragraphi praecedentis progreſſione priore $f=1$, $g=2$, erit terminus ordine $n=\frac{2.\,4.\,6.\,8.\,-\,-\,-\,2n}{3.\,5.\,7.\,9.\,-\,-\,-\,(2n+1)}$, progreſſio vero ipſa haec $\frac{2}{3}+\frac{2.\,4}{3.\,5}+\frac{2.\,4.\,6}{3.\,5.\,7}$ etc. cuius terminus generalis ergo erit $\frac{2n+3}{2}\int dx(1-x)^n\sqrt{x}$. Quaeratur terminus

minus cuius index $\frac{1}{2}$; fiet igitur $n = \frac{1}{2}$, et habebitur terminus quaeſitus $= 2\int dx \sqrt{(x - xx)}$. Quod cum ſignificet elementum areae circularis, perſpicuum eſt terminum quaeſitum eſſe aream circuli, cuius diameter $= 1$. Propoſita porro ſit haec ſeries, $1 + \frac{r}{1} + \frac{r.(r-1)}{1.\ 2.} + \frac{r.(r-1)(r-2)}{1.\ 2.\ 3.}$ etc., quae eſt coefficientium binomii ad poteſtatem r eleuati. Terminus ordine n eſt ergo $\frac{r.(r-1)(r-2) - - - (r-n+2)}{1.\ 2.\ 3, \quad (n-1)}$ In §. praecedente habetur hic $\frac{1\ 2\ 3. - - - n}{(f+g)(f+2g) - - (f+ng)}$ Hic, vt cum illo comparetur inuertendus eſt, vt habeatur $\frac{(f+g)(f+2g) - - - - (f+ng)}{1.\ 2. - - - n}$; multiplicetur hic per $\frac{n}{(f+ng)}$, et erit is $= \frac{(f+g)(f+2g) - - - (f+(n-1)g)}{1.\ 2 - - - (n-1)}$ oportet igitur eſſe $f+g=r$ et $f+2g=r-1$, vnde fiet $g = -1$ et $f = r+1$. Eodem modo tractetur terminus generalis $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx$ $(1-x)^n$. Prodibit pro progreſſione propoſita $1 + \frac{r}{1} + \frac{r.(r-1)}{1\ 2.}$ etc., hic terminus generalis,

$$\frac{n(-1)^{n+1}}{(r-n)(r-n+1)\int x^{-r-1} dx (1-x)^n}.$$

Sit $r=2$ erit huius progreſſionis $1, 2, 1, 0, 0, 0,$ etc., terminus generalis $n(-1)^{n+1} : ((2-n)(3-n)\int x^{-3} dx$ $(1-x)^n)$. Hic autem notari debet, hunc caſum et alios quibus $e+1$ fit numerus negatiuus, non poſſe ex generali deduci, quia tunc integrale non non fit $=0$ ſi $x=0$. Pro his vero $\int x^e dx (1-x)^n$ peculiari modo integrari conuenit, poſt integrationem enim conſtans infinita eſt adiicienda: quando ve-

ro $e+1$ eſt numerus affirmatiuus, vt poſui §. 8. conſtantis additione non eſt opus. Conſiderata autem progreſſione, cuius terminus ordine n erat ſequens, $\frac{r(r-1)(r-2)-(r-n+2)}{1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ (n-1)}$, transmutari poteſt illa termini exponentis n forma in hanc $\frac{r.(r-1)\ -\ -\ -\ -\ -\ 1}{(1.2.3.\ -\ -\ -\ (n-1)(1.2.\ -\ -(r-n+1)}$. Sed per §. 14. eſt $r.\ r-1\ -\ -\ -\ -\ -\ 1 = \int dx(-lx)^r$, et $1.\ 2.\ 3.\ -\ -\ -\ -\ (n-1)$ eſt $\int dx(-lx)^{n-1}$ et $1.\ 2.\ -\ -\ -\ -\ (r-n+1) = \int dx(-lx)^{r-n+1}$. Quamobrem ibi tractatae progreſſionis $1 + \frac{r}{1} + \frac{r.\ r-1}{1.\ 2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.\ 2.\ 3.} +$ etc. hic habetur terminus generalis $\frac{\int dx(-lx)^r}{\int dx(-lx)^{n-1}\int dx(-lx)^{r-n+1}}$

Si fuerit $r=2$, erit terminus generalis $\frac{2}{\int dx(-lx)^{n-1}\int dx(-lx)^{3-n}}$, cui reſpondet haec progreſſio 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, etc. Vt ſi quaeratur terminus indicis $\frac{3}{2}$ erit is $= \frac{2}{\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}\int dx(-lx)^{\frac{3}{2}}}$

Dicta ergo area circuli $=A$, cuius diameter eſt $=1$, quia eſt $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$ et $\int dx(-lx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{A}$, erit terminus medium interiacens inter duos primos terminos progreſſionis 1, 2, 1, 0, 0, 0, etc. huius formae $\frac{4}{3A}$, hoc eſt $\frac{5}{3}$ quam proxime.

§. 12. Progredior nunc ad progreſſionem, de qua initio dixi, $1+1.\ 2+1.\ 2.\ 3$ etc. et in qua terminus ordine n eſt $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ -\ -\ -\ n$. Continetur haec progreſſio in generali noſtra, ſed terminus ge-

generalis peculiari modo inde deriuari debet. Hactenus ſcilicet terminum generalem habui ſi terminus ordine n eſt $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(f+g)(f+2g) \cdots (f+ng)}$, qui ſi ponatur $f=1$ et $g=0$, abit in $1.2.3. \cdots n$, cuius terminus generalis quaeritur: ſubſtituantur ergo in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$, hi valores loco f et g, erit terminus generalis quaeſitus $\int \frac{x^{\frac{1}{0}} dx(1-x)^n}{0^{n+1}}$. Qui vero huius expreſſionis ſit valor, ſequenti modo inueſtigo.

§. 13. Ex conditione, qua huiusmodi termini generales vſui accommodari debent, intelligitur loco x alias functiones ipſius x poſſe ſubrogari, dummodo eae tales fuerint, vt ſint $=0$ ſi $x=0$ et $=1$ ſi $x=1$. Huiusmodi enim functiones ſi loco x ſubſtituantur, terminus generalis perinde ſatisfaciet ac ante. Ponatur igitur $x^{\frac{g}{f+g}}$ loco x et conſequenter $\frac{g}{f+g} x^{\frac{-f}{g+f}} dx$ loco dx; quo facto habebitur $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int \frac{g}{f+g} dx(1-x^{\frac{g}{f+g}})^n$ Iam hic ponatur $f=1$, et $g=0$, habebitur $\int \frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$. Cum autem ſit $x^0=1$; habemus hic caſum, quo numerator et denominator euaneſcunt $(1-x^0)^n$ et 0^n. Per regulam igitur cognitam quae-

 ramus

ramus valorem fractionis $\frac{1-x^0}{0}$. Id quod fiet quaerendo valorem fractionis $\frac{1-x^z}{z}$ tum, cum z euaneſcit, differentietur igitur et numerator et denominator ſola z variabili poſita; habebitur $\frac{-x^z dz lx}{dz}$ ſeu $-x^z lx$, ſi iam ponatur $z=0$, prodibit $-lx$. Eſt itaque $\frac{1-x^0}{0}=-lx$.

§. 14. Cum igitur ſit $\frac{1-x^0}{0}=-lx$, erit $\frac{(1-x^0)^n}{0^n}=(-lx)^n$, et propterea terminus generalis quaeſitus $\int\frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$ transmutatus eſt in $\int dx(-lx)^n$. Cuius valor inueniri per quadraturas poteſt. Quamobrem huius progreſſionis 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. terminus generalis eſt $\int dx(-lx)^n$, eodem modo adhibendus, quo ſupra praeceptum eſt. Hunc autem eſſe terminum generalem progreſſionis propoſitae ex eo quoque cognoſcitur, quod terminos, quorum indices ſunt numeri integri affirmatiui, reuera praebeat, ſit v. g. $n=3$, erit $\int dx(-lx)^3=\int -dx(lx)^3=-x(lx)^3+3(xlx)^2-6xlx+6x$ conſtantis additione opus non eſt, cum facto $x=0$ omnia euaneſcant, ponatur igitur $x=1$, quia $l1=0$, omnes termini logarithmis affecti

ſecti euaneſcent et reſtabit 6, qui eſt terminus tertius.

§. 15. Verum quidem eſt, hanc methodum terminorum iſtius ſeriei inueniendorum nimis eſſe operoſam, eorum nimirum quorum indices ſunt numeri integri, qui vtique facilius continuanda progreſſione obtinentur. Verum tamen ad terminos indicum fractorum inueniendos per quam eſt idonea, quippe qui adhuc ne operoſiſſima quidem methodo definiri potuerunt. Si ponatur $n = \frac{1}{2}$ habebitur reſpondens terminus $= \int dx \sqrt{-lx}$ cuius valor per quadraturas datur. Sed initio oſtendi hunc terminum eſſe aequalem radici quadratae ex circulo cuius diameter eſt 1. Hinc quidem idem concludere non licet, ob defectum analyſis; infra autem ſequetur methodus eosdem terminos intermedios ad algebraicarum curuarum quadraturas reducendi. Ex cuius cum hac comparatione forte nonnihil ad amplificationem analyſis deriuari poterit.

§. 16. Progreſſionis cuius terminus ordine n indicatur per $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot - - - - n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) - - (f+ng)}$, terminus generalis eſt per §. 10. $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Si autem terminus ordine n fuerit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot - - - n$, tum eſt terminus generalis $\int dx (-lx)^n$. Quae formula, ſi loco $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot - - - n$ ſub-

ſubſtituatur, habebitur $\frac{\int dx(-lx)^n}{(f+g)(f+2g)--(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n$: Ex quo efficitur $(f+g)(f+2g)---(f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$ Quae expreſſio igitur eſt terminus generalis, huius generalis progreſſionis $f+g$, $(f+g)(f+2g)$, $(f+g)(f+2g)(f+3g)$, etc. Huiusmodi igitur progreſſionum omnium ope termini generalis omnes termini cuiuscunque indicis definiuntur. Quae infra ſequentur, de reductione $\int dx(-lx)^n$ ad quadraturas notiores, ſeu curuarum algebraicarum, etiam hic vſum habebunt.

§. 17. Sit $f+g=1$, et $f+2g=3$, erit $g=2$ et $f=-1$. Vnde orietur haec progreſſio particularis 1, 1.3, $1.3.5$, $1.3.5.7$, etc. Cuius igitur terminus generalis eſt $\frac{2^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(2n+1)\int x^{-\frac{1}{3}}dx(1-x)^n}$. Quanquam hic exponens ipſius x ſit negatiuus, tamen id incommodum, de quo ſupra dictum, hic locum non habet, cum ſit vnitate minor. Ponatur $n=\frac{1}{2}$ vt inueniatur terminus ordine $\frac{1}{2}$, erit is $= \frac{2^{\frac{3}{2}}\int dx\sqrt{-lx}}{2\int x^{-\frac{1}{2}}dx\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}\int dx\sqrt{-lx}}{\int\frac{dx-xdx}{\sqrt{x-xx}}}$. Per §. 15. autem conſtat dare $\int dx\sqrt{-lx}$ radicem quadratam ex

ex circulo, cuius diameter $=1$, ſit peripheria eius circuli p, erit area $=\frac{1}{4}p$, adeoque $\int dx\sqrt{-lx}$ dat $\frac{1}{2}\sqrt{p}$. Deinde $\int\frac{dx-xdx}{\sqrt{x-xx}}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}+\sqrt{(x-xx)}$ ſed $\int\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$ dat arcum circuli, cuius ſinus verſus eſt x. Poſito itaque $x=1$, proueniet $\frac{1}{2}p$. Quamobrem terminus quaeſitus erit $=\sqrt{\frac{2}{p}}$.

§. 18. Cum progreſſionis, cuius terminus ordine n indicatur per $(f+g)(f+2g)----(f+ng)$, terminus generalis per §. 16. ſit $\frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$ ſimiliter ſi terminus ordine n fuerit $(b+k)(b+2k)----(b+nk)$, erit terminus generalis $\frac{k^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(b+(n+1)k)\int x^{\frac{b}{k}}dx(1-x)^n}$. Diuidatur illa progreſſio per hanc, nempe terminus primus per primum, ſecundus per ſecundum et ita porro: deuenietur ad nouam progreſſionem, cuius terminus ordine n erit $\frac{(f+g)(f+2g)----(f+ng)}{(b+k)(b+2k)----(b+nk)}$. Et terminus generalis huius progreſſionis ex illis duobus compoſitus erit $\frac{g^{n+1}(b+(n+1)k)\int x^{\frac{b}{k}}dx(1-x)^n}{k^{n+1}(f+(n+1)g)\int x^{\frac{f}{g}}dx(1-x)^n}$ Qui vacuus eſt ab integrali logarithmico $\int dx(-lx)^n$.

§. 19. In omnibus huiusmodi terminis generalibus hoc maxime notandum eſt, non quidem

dem loco f, g, h, k numeros conſtantes poni oportere, ſed eos quomodocunque ab n pendentes quoque aſſumi poſſe. In integratione enim eae literae perinde atque n tractantur, omnes tanquam conſtantes. Sit terminus ordine n hic $(f+g)(f+2g) - - - - (f+ng)$, ponatur $g = 1$, ſed $f = \frac{nn-n}{2}$. Quia progreſſio ipſa eſt $(f+g)$, $(f+g)(f+2g)$, $(f+g)(+2g)(f+3g)$ etc. ponatur vbique 1 loco g, erit ea, $f+1$, $(f+1)(f+2)$, $(f+1)(f+2)(f+3)$. Sed loco f ſcribi debet in termino primo 0, in ſecundo 1, in tertio 3, in quarto 6 et ita porro, prodibit haec progreſſio 1, 2.3, 4.5.6, 7.8.9.10, etc. cuius igitur terminus generalis

$$\frac{2\int dx(-lx)^n}{(nn+n+2)\int x^{\frac{nn-n}{2}} dx(1-x)} = \frac{2\int dx(-lx)^n}{(nn+n+2)\int dx(x^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n+1}{2}})^n}.$$

§. 20. Accedo nunc ad eas progreſſiones, vnde compendium illud in definiendis terminis intermediis huius progreſſionis 1, 2, 6, 24, 120, etc. nactus ſum. Id enim latius patet quam ad hanc ſolam progreſſionem, quoniam eius terminus generalis $\int dx(-lx)^n$ etiam in infinitarum aliarum progreſſionum terminos generales ingreditur. Aſſumo hunc terminum generalem $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$, cui reſpondet terminus ordine n hic

1.2.3.

$\frac{1.\;2.\;3.\;-\;-\;-\;n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\;-\;-\;-\;(f+ng)}$. Pono hic $f=n$, $g=1$, erit terminus generalis $(2n+1)\int x^n dx(1-x)^n$ vel $(2n+1)\int dx\,(x-xx)^n$ et forma eius ordine n, $\frac{1.\;2.\;3.\;-\;-\;-\;n}{(n+1)(n+2)(n+3)\;-\;-\;-\;2n}$. Progreſſio vero ipſa haec $\frac{1}{2}$, $\frac{1.2.}{3.4.}$, $\frac{1.2.3.}{4.5.6.}$, etc. vel haec $\frac{1.1}{1.2}$, $\frac{1.2.1.2}{1.2.3.4}$, $\frac{1.2.3.1.2.3.}{1.2.3.4.5.6.}$ etc. In qua numeratores ſunt quadrata progreſſionis 1. 2. 6. 24. inter denominatores vero duos proximos aequidiſtans facile inuenitur. Sit in progreſſione 1, 2, 6, 24. etc. terminus, cuius index $\frac{1}{2}$, A, erit progreſſionis illius terminus ordine $\frac{1}{2} = \frac{AA}{1}$.

§. 21. Ponatur in termino generali $(2n+1)\int x^n dx(1-x)^n$, $n=\frac{1}{2}$ erit terminus huius exponentis $=2\int dx\sqrt{x-xx}=\frac{AA}{1}$, vnde $A=\sqrt{1.2.\int dx\sqrt{(x-xx)}}$ = termino progreſſionis 1, 2, 6, 24, etc. cuius index eſt $\frac{1}{2}$, qui ergo vt ex eo elucet eſt radix quadrata ex circulo diametri 1. Dicatur nunc terminus huius progreſſionis ordine $\frac{3}{2}$, A, erit reſpondens in aſſumta progreſſione $=\frac{AA}{1.2.3}=4\int dx(x-xx)^{\frac{3}{2}}$ ergo $A=\sqrt{1.2.3.4.\int dx(x-xx)^{\frac{3}{2}}}$ Simili modo inuenitur terminus ordine $\frac{5}{2}=\sqrt{1.2.3.4.5.6.\int dx(x-xx)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus generaliter concludo terminum ordine $\frac{p}{2}$ fore $=\sqrt{1.2.3.4.\;-\;-\;-\;(p+1)\int dx(x-xx)^{\frac{p}{2}}}$. Hoc igitur modo inueniuntur omnes termini progreſſionis, 1, 2, 6, 24, etc. quorum indices ſunt fractiones denominatore exiſtente 2.

§. 22. Porro in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}$ $\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$, pono $f=2n$ manente $g=1$, prodibit $(3n+1)\int dx(xx-x^3)^n$ terminus generalis huius progreſſionis $\frac{1}{3}$, $\frac{1.2}{5.6}$, $\frac{1.2.3}{7.8.9}$ etc. Multiplicetur ille per praecedentem $(2n+1)\int dx(x-xx)^n$, prodibit $(2n+1)(3n+1)\int dx(x-xx)^n \int dx(xx-x^3)^n$. Qui dabit hanc progreſſionem $\frac{1.1.1}{1.2.3}$, $\frac{1.2.1.2.1.2}{1.2.3.4.5.6}$ etc. vbi numeratores ſunt cubi terminorum reſpondentium progreſſionis 1. 2, 6. etc. Huius progreſſionis terminus ordine $\frac{1}{3}$ ſit A, erit reſpondens illius $\frac{A^3}{1} = 2\left(\frac{2}{3}+1\right)\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$, ergo terminus ordine $\frac{1}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.\frac{5}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{1}{3}}}$: ſimiliter term. ordine $\frac{2}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.3.\frac{7}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{2}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{2}{3}}}$. Atque terminus ordine $\frac{4}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.3.4.5.\frac{11}{3}\int dx(x-xx)^{\frac{4}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{4}{3}}}$ et generaliter terminus ordine $\frac{p}{3}$ eſt $\sqrt[3]{1.2.---p.\left(\frac{2p+3}{3}\right)(p+1)\int dx(x-xx)^{\frac{p}{3}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{3}}}$.

§. 23. Si vlterius progredi velimus, ponendo $f=3n$, oportebit terminum generalem $(4n+1)\int dx(x^3-x^4)^n$ in praecedentes multiplicare, vnde habetur $(2n+1)(3n+1)(4n+1)\int dx(x-xx)^n\int dx(x^2-x^3)^n\int dx(x^3-x^4)^n$ qui eſt pro hac ſerie $\frac{1.1.1.1}{1.2.3.4}$ $\frac{1.2.1.2.1.2.1.2}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ etc. Ex qua definientur termini pro-

progreſſionis 1, 2, 6, 24, etc. quorum indicet ſunt fractiones denominatorem 4 habentes. Nimirum terminus cuius index eſt $\frac{p}{4}$ inuenietur $= \sqrt[4]{1.2.3.---p.(\frac{2p}{4}+1)(\frac{3p}{4}+1)(p+1) \int dx(x-xx)^{\frac{p}{4}} \int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{4}} \int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{4}}}$. Hinc generaliter concludere licet terminum ordine $\frac{p}{q}$ eſſe $= \sqrt[q]{(1.2.3.---p)((\frac{2p}{q}+1)(\frac{3p}{q}+1)(\frac{4p}{q}+1)-----(p+1))(\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}} \int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}} \int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}} ---- \int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}})}$. Ex hac igitur formula termini cuiuscunque indicis fracti inuenientur per quadraturas curuarum algebraicarum: ad id autem requiritur $(1.2.3.--p)$ terminus cuius index eſt numerator fractionis propoſitae.

§. 24. Eodem modo vlterius progredi licet ad progreſſiones magis compoſitas, aſſumendis terminis generalibus magis compoſitis, ſed ea longius non perſequor. Poſſunt etiam ſigna integralia multiplicari, vt terminus generalis ſit $\int q dx \int p dx$ nimirum integrale ipſius pdx debet multiplicari per qdx, et quod reſultat denuo integrari, id quod demum dabit facto $x = 1$ terminum ſeriei. In vtraque autem integratione, vt ſit determinata, oportet addenda conſtante efficere, vt poſito $x = 0$, integrale fiat itidem $= 0$. Similiter tractandi ſunt termini generales,

 qui

qui pluribus ſignis integralibus continentur vt $\int r\,dx \int q\,dx \int p\,dx$. Attamen ſemper loco p, q, r etc. tales ſunt ſumendae functiones, vt, quoties n fuerit numerus integer affirmatiuus, prodeant termini ad minimum algebraici.

§. 25. Sit terminus generalis $\int \frac{dx}{x} \int x^e\,dx(1-x)$ hic in ſeriem conuerſus dat $\frac{x^{e+1}}{(e+1)^2} - \frac{n.\,x^{e+2}}{1.(e+2)^2} + \frac{n.\,n-1.\,x^{e+3}}{1.2.(e+3)^2}$ etc. Poſito $x=1$, habebitur terminus ordine n per hanc ſeriem $\frac{1}{(e+1)^2} - \frac{n}{1\,(e+2)^2} + \frac{n.n-1}{1.2.(e+3)^2}$ etc. Progreſſio vero ipſa haec erit a termino cuius index eſt o incipiens $\frac{1}{(e+1)^2}$, $\frac{(e+2)^2-(e+1)^2}{(e+2)^2(e+1)^2}$, $\frac{(e+3)^2(e+2)^2-2(e+3)^2(e+1)^2+(e+2)^2(e+1)^2}{(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$, $\frac{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2-3(e+4)^2(e+3)^2(e+1)^2+3(e+4)^2(e+2)^2(e+1)^2-(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$ etc. Lex huius progreſſionis manifeſta eſt, et non indiget explicatione. Sit $e=o$, erit $\int dx(1-x)^n = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$. ergo terminus generalis eſt $\int \frac{dx-dx(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}$, progreſſio vero haec erit $\frac{1}{1}$, $\frac{4-1}{4.1}$, $\frac{9.4-2.9.1+4.1}{9.4.1}$, $\frac{16.9.4-3.16.9.1+3.16.4.1-9.4.1}{16.9.4.1}$ etc. Huius differentiae hanc conſtituent progreſſionem, $\frac{-1}{4.1}$, $\frac{-9+4}{9.4.1}$, $\frac{-16.9+2.16-9.4}{16.9.4.1}$ etc.

§. 26. In hac diſſertatione ergo id, quod praecipue intendi, aſſecutus ſum; nempe vt terminos

minos generales inuenirem omnium progreſſionum, quarum ſinguli termini ſunt facta ex factoribus in progreſſione arithmetica progredientibus, in quibusque numerus factorum vt libuerit ab indicibus terminorum pendeat. Quanquam autem hic ſemper numerus factorum indici aequalis poſitus ſit, tamen ſi is alio modo inde pendens deſideretur, res nihil habet difficultatis. Index denotatus eſt litera n, ſi iam quis requirat vt numerus factorum ſit $\frac{nn+n}{2}$, alia operatione opus non eſt, niſi vt vbique loco n ſubſtituatur $\frac{nn+n}{2}$.

§. 27. Coronidis loco adhuc aliquid, curioſum id quidem magis quam vtile adiungam. Notum eſt per $d^n x$ intelligi differentiale ordinis n ipſius x, et $d^n p$, ſi p denotet functionem quamcunque ipſius x, ponaturque dx conſtans, eſſe homogeneum cum dx^n, ſemper autem, quando n eſt numerus integer affirmatiuus, ratio quam habet $d^n p$ ad dx^n algebraice poteſt exprimi, vt ſi $n=2$ et $p=x^3$, erit $d^2(x^3)$ ad dx^2 vt $6x$ ad 1. Quaeritur nunc ſi n ſit numerus fractus, qualis tum futura ſit ratio. Difficultas in his caſibus facile intelligitur, nam ſi n eſt numerus integer affirmatiuus, d^n continuata differentiatione inuenitur, talis autem via non patet, ſi n eſt numerus fractus. Sed tamen ope interpolationum progreſſionum, de quibus in hac diſſertatione explicaui, rem expedire licebit.

§. 28.

§. 28. Sit iuuenienda ratio inter $d^n(z^e)$ et dz^n poſito dz conſtante, ſeu requiritur valor fractionis $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$. Videamus primo qui ſint eius valores ſi n eſt numerus integer, vt poſtmodum generaliter illatio fieri poſſit. Si $n=1$. erit eius valor $e z^{e-1} = \frac{1.\,2.\,3.\cdots e}{1.\,2.\,3.\cdots(e-1)} z^{e-1}$, hoc modo e exprimo, vt facilius poſtea ea quae tradita ſunt huc referantur. Si $n=2$, erit valor $e(e-1)z^{e-2} = \frac{1.\,2.\,3.\cdots e}{1.\,2.\,3.\cdots(e-2)} z^{e-2}$. Si $n=3$, habebitur $e(e-1)(e-2)z^{e-3} = \frac{1.\,2.\,3.\cdots e}{1.\,2.\,3.\cdots(e-3)} z^{e-3}$. Hinc generaliter infero quicquid ſit n fore ſemper $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1.\,2.\,3.\cdots e}{1.\,2.\,3.\cdots(e-n)} z^{e-n}$. Eſt autem per §. 14, $1.\,2.\,3.\cdots e = \int dx(-lx)^e$ et $1.\,2.\,3.\cdots(e-n) = \int dx(-lx)^{e-n}$. Quare habetur $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n} \frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}}$ vel $d^n(z^e) = z^{e-n}dz^n \frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}}$. Ponitur hic dz conſtans et $\int dx(-lx)^e$ vt et $\int dx(-lx)^{e-n}$ ita debent integrari, vt ſupra praeceptum eſt, et tum ponere oportet $x=1$.

§. 29. Non neceſſe eſt, quomodo verum eliciatur, oſtendere, apparebit id ponendo loco n numerum integrum affirmatiuum quemcunq;. Quaeratur autem quid ſit $d^{\frac{1}{2}}z$, ſi ſit dz conſtans. Erit ergo $e=1$ et $n=\frac{1}{2}$. Habebitur itaque $d^{\frac{1}{2}}z = \frac{\int dx(-lx)}{\int dx\sqrt{-lx}}$

$\sqrt{zdz}$

$\sqrt{zdx}$. Eſt autem $\int dx\sqrt{(x-xx)}$ = dictae areae circuli A, cuius diameter eſt 1, erit $\int dx\sqrt{x-xx} = \sqrt{A}$, vnde $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{zdz}{A}}$. Propoſita igitur ſit haec aequatio ad quampiam curuam $yd^{\frac{1}{2}}z = z\sqrt{dy}$, vbi dz ponitur conſtans, et quaeratur qualis ea ſit curua. Cum ſit $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{zdz}{A}}$ abibit ea aequatio in hanc $y\sqrt{\frac{zdz}{A}} = z\sqrt{dy}$, quae quadrata dat $\frac{yydz}{zA} = zdy$: vnde inuenitur $\frac{1}{A}lz = c - \frac{1}{y}$, vel $ylz = cAy - A$, quae eſt aequatio ad curuam quaeſitam.

PROBLEMATIS
DE
STATIONIBVS PLANETARVM
CASVS ALTER.

AVCTORE
F. C. Maiero.

Sint datae duorum Planetarum orbitae ad eclipticae planum reductae, earumque poſitio; ſit quoque data vnius diſtantia a Sole. Quaeritur diſtantia alterius ſtationaria. Tabula II. Fig. 2.

Maioris orbitae axis AB ſit = A.
eiusdem eccentricitas dupla OF ſit = F.
eiusdem parameter = P.

Diſtantia planetae maioris OS ſit $=D$.
In minore orbita ſit parameter $=p$
diſtantia planetae OI $=d$.

Haec interioris orbitae diſtantia ſumatur vt data: ergo et angulus IOF, quo axium poſitio definitur.

Sinus anguli FOI $=s$, coſinus $=c$.

Habetur autem praeterea ex natura ellipſeos

Coſinus anguli FOS $= r\frac{2AD-AP}{2DF} = N$, eiusque ſinus $=M$.

ex conditione ſtationis eſt

Coſinus anguli SOI $= rDd\frac{P^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{2}}}{DDp^{\frac{1}{2}}+ddP^{\frac{1}{2}}} = q$,

eiusque ſinus $=p$.

Inde ſit porro (ob angul. SOI $=$ ang. FOI $-$ ang. FOS)

1. $\frac{Nc+Ms}{r} = q$, ergo, $rq - Nc = Ms$.

quadrando ſit

2. $r^2q^2 - 2rqNC + N^2c^2 = M^2s^2 = r^4 - r^2N^2 - r^2c^2$. N^2c^2.

3. $r^2q^2 + r^2c^2 + r^2N^2 - 2rqNc - r^4 = 0$:

facta ſubſtitutione aequiualentium, et diuiſione per r^2 habetur

$$4.\ \begin{cases} r^2D^2d^2\frac{P+2\sqrt{Pp}+p}{(DDp^{\frac{1}{2}}+ddP^{\frac{1}{2}})^2} + r^2A^2\frac{(2D-P)^2}{4D^2F^2} \\ -rcAd\frac{(2D-P)(P^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{2}})}{F(D^2p^{\frac{1}{2}}+d^2P^{\frac{1}{2}})} + cc - rr = 0. \end{cases}$$

Praecedens aequatio quarta ducatur in $4DDFF(DDp^{\frac{1}{2}}+ddP^{\frac{1}{2}})^2$.

5.

$$5.\quad \begin{cases} 4r^2D^4d^2F^2(P+P^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}+p)+r^2A^2(2D-P)^2 \\ (DDp^{\frac{1}{2}}+ddP^{\frac{1}{2}})^2 - - - - \\ -4rcdA D^2F(2D-P)(P^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{2}})(DDp^{\frac{1}{2}}+ddP^{\frac{1}{2}}) \\ -4c^2D^2F^2(DDp^{\frac{1}{2}}+ddP^{\frac{1}{2}})^2=0. \end{cases}$$

Haec vero porro in ordinem redigatur

$$6.\quad \begin{cases} D^6-rA\dfrac{2cdFp^{\frac{1}{2}}+2cdFP^{\frac{1}{2}}+rAPp^{\frac{1}{2}}}{c^2F^2p^{\frac{1}{2}}+r^2APp^{\frac{1}{2}}}D^5 - - \\ \dfrac{+4r^2d^2F^2P+4r^2d^2F^2p+8c^2A^2P^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}d^2+r^2A^2P^2p+4rcdAFP^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}+4crdAFPp+8c^2d^2F^2P^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}}{4p(c^2F^2+r^2AP)}D^4- \\ -2rAd^2P^{\frac{1}{2}}\dfrac{rAPp^{\frac{1}{2}}+cdFp^{\frac{1}{2}}+cdFP^{\frac{1}{2}}}{p(c^2F^2+r^2AP)}D^3+d^2P \\ \dfrac{r^2A^2P^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}+2rcdAFP+2rcdAFP^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}+2c^2F^2+2r^2d^2AP}{2p(c^2F^2+r^2AP)}D^2 \\ -\dfrac{r^2A^2d^4P^2}{p(r^2AP+c^2F^2)}D+\dfrac{d^4r^2P^3A^2}{4(r^2AP+c^2F^2)p}=0. \end{cases}$$

Poteſt haec aequatio diuidi per aliam quadratici ordinis, vt poſtea patebit.

Scholion.

2. Idem problema poteſt aliter et breuius ſolui, ita quidem vt aequatio non niſi quatuor dimenſionum prodeat. Debent autem in ſubſidium adhiberi duo ſequentia Lemmata. Fig. 3.

Lemma I.

3. In omni quadrilatero FOIS, [poſitis OF $=$F, OI$=d$, SI$=$M, SF$=$N, OS$=$D, et FI

H 2 $=m$]

$-m$] eſt, $F^2d^2 + F^2m^2 + d^2m^2 + M^2m^2 + M^2N^2 + m^2N^2 - m^4 = F^2D^2 + F^2N^2 + D^2N^2 + M^2d^2 + M^2D^2 + d^2D^2 - D^4$.

Nam $\Delta IOS + \Delta OSF = \Delta FIS + \Delta FIO$. Horum vero triangulorum areae exprimi poſſunt per ſua latera, [quod aliunde notum eſt] igitur ad aequationem deuenitur ſequentem, $2D^2d^2 + 2D^2M^2 + 2M^2d^2 - D^4 - d^4 - M^4 + 2D^2F^2 + 2D^2N^2 + 2F^2N^2 - D^4 - F^4 - N^4 = 2M^2m^2 + 2M^2N^2 + 2N^2m^2 - M^4 - m^4 - N^4 + 2m^2d^2 + 2m^2F^2 + 2F^2d^2 - m^4 - d^4 - F^4$, deletis vtrinque aequalibus, et diuiſione facta per 2, habetur $D^2d^2 + D^2M^2 + d^2M^2 + D^2F^2 + D^2N^2 + F^2N^2 - D^4 = M^2m^2 + M^2N^2 + m^2N^2 + m^2d^2 + m^2F^2 + d^2F^2 - m^4$. Q. E. D.

Lemma 2.

4. Quadratum lineae SI (fig. 1.) ſurgentis planetas ſtationarios eſt $= \frac{D^4p^{\frac{1}{2}} - D^2d^2P^{\frac{1}{2}} - D^2d^2p^{\frac{1}{2}} + d^4P^{\frac{1}{2}}}{D^2p^{\frac{1}{2}} + d^2P^{\frac{1}{2}}}$

Ponatur linea $SI = Z$, ita fiet coſinus anguli SOI (per trigonometriae praecepta) $r\frac{D^2 + d^2 - Z^2}{2Dd}$ idem vero coſinus ſtationis temporeſt $= rDd\frac{P^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}}{D^2p^{\frac{1}{2}} + d^2P^{\frac{1}{2}}}$, ergo facta reductione aequationis legitima habetur $Z^2 = \frac{D^4p^{\frac{1}{2}} - D^2d^2p^{\frac{1}{2}} - D^2d^2P^{\frac{1}{2}} + d^4P^{\frac{1}{2}}}{D^2p^{\frac{1}{2}} + d^2P^{\frac{1}{2}}}$

Q. E. D.

So-

Solutio Problematis altera.

5. Ducantur ex foco F lineae FI et FS, vt obtineatur quadrilaterum FOIS, ſumaturque linea FI vt data, quae nimirum ſitum axium determinet, et ponatur eſſe $= m$. Eſt et praeterea OI $= d$, OS $=$ D, OF $=$ F, FS $=$ A $-$ D, et SI $=$ $\frac{\sqrt{(D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}})}}{\sqrt{(D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}})}}$. Ex hisce poſitis aequatio formatur per Lemma 1. §. 2., vti ſequitur. Fig. 2.

$$1.\left\{\begin{aligned} & F^2 d^2 + F^2 m^2 + d^2 m^2 + D^2 m^2 + A^2 m^2 - 2ADm^2 \\ & - m^4 + m^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}} + \\ & \frac{(A^2 - 2AD + D^2)(D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}})}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}} \\ & = 2F^2 D^2 + F^2 A^2 + D^2 A^2 + D^2 d^2 - 2F^2 AD - \\ & 2D^3 A + d^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}} \\ & + D^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Inde fit porro.

$$2.\left\{ 2p_{\frac{1}{2}}\left\{\begin{matrix} +m^2 \\ +d^2 \\ -F^2 \end{matrix}\right\} D^4 + 2A \left\{\begin{matrix} -m^2 p_{\frac{1}{2}} \\ +d^2 p_{\frac{1}{2}} \\ +F^2 p_{\frac{1}{2}} \\ +2d^2 P_{\frac{1}{2}} \end{matrix}\right\} D^3 - \left\{\begin{matrix} +F^2 A^2 p_{\frac{1}{2}} \\ +d^2 A^2 p_{\frac{1}{2}} \\ +m^4 p_{\frac{1}{2}} \\ +F^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} \\ -F^2 m^2 p_{\frac{1}{2}} \\ -A^2 m^2 p_{\frac{1}{2}} \\ -d^4 p_{\frac{1}{2}} \\ +2A^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} \\ +2F^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} \end{matrix}\right\} D \right.$$

 -2

$$-2Ad^2P^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} d^2 \\ m^2 \\ -F^2 \end{array}\right\}D+d^2P^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} F^2d^2 \\ F^2m^2 \\ 2m^2d^2 \\ A^2d^2 \\ A^2m \\ -m^4 \\ -F^2A^2 \\ -d^4 \end{array}\right\}=0.$$

Fiat coſinus anguli FOI $= c$, vt habeatur $m^2 = \frac{rF^2+rd^2-2Fcd}{r}$ hoc valore in aeq. 2. ſubſtituto, ceterisque bene obſeruatis, emerget

$$3.\quad\left\{\begin{array}{l} D^4-\left\{\begin{array}{l} Fcp^{\frac{1}{2}} \\ rdP^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}\frac{AD^3}{Fcp^{\frac{1}{2}}}+\left\{\begin{array}{l} APFcrp^{\frac{1}{2}} \\ A^2r^2dP^{\frac{1}{2}} \\ F^2r^2dP^{\frac{1}{2}} \\ -2Fd^2rcp^{\frac{1}{2}} \\ +2F^2c^2dp^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}\frac{D^2}{2rcFp^{\frac{1}{2}}} \\ +\frac{Ad^2P^{\frac{1}{2}}}{Fcp^{\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l} rd \\ -Fc \end{array}\right\}D-\frac{d^2P^{\frac{1}{2}}}{2Frcp^{\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l} APFrc \\ 2F^2c^2d \\ -A^2dr^2 \\ -F^2dr^2 \end{array}\right\}=0. \end{array}\right.$$

Poteſt haec aequatio in factores reſolui hoc modo.

$$\left(\frac{2Fcp^{\frac{1}{2}}}{rdP^{\frac{1}{2}}}D^2-2AD-AP\right)\left(2D^2-2AD+AP-2d^2+\frac{2Fcd}{r}\right)$$

$= \frac{4F^2c^2d^2}{r^2} - 4F^2d^2-A^2P^2$, cuius aequationis radix D dabit diſtantiam alterius planetae, ideoque locum ipſum in orbita ſua, in quo eſt ſtationarius.

Dan.

Dan. Bernoulli

NOTATIONES DE AEQVATIONIBVS, QVAE PROGREDIVNTVR IN INFINITVM, EARVMQVE RESOLVTIONE PER METHODVM SERIERVM RECVRRENTIVM: VT ET DE NOVA SERIERVM SPECIE.

Praelectio Prima.

1.

FRequentes admodum ſunt aequationes, quae ſine fine progrediuntur; ſolent autem hac forma eſſe praeditae

$$y = x + ax + bx^3 + cx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

aut euaneſcentibus terminorum alternorum coefficientibus

$$y = x + fx^3 + gx^5 + hx^7 + lx^9 + \text{etc.}$$

vbi coefficientes certa lege inſtar ſerierum numericarum ſe ſubſequuntur.

§. 2. Tales aequationes exhiberi potiſſimum ſolent pro quadraturis aut rectificationibus, ita vt dum x rectam aliquam lineam variabilem indicat, exprimatur per y ſpatium aliquod curuilineum, aut arcus lineae curuae, quae iſti lineae rectae reſpondeant; quoniam autem ſaepenumero ſolutio deſideratur problematis inuerſi, quod poſtulat, vt ex arcu curuae definiatur recta iis reſpon-

ſpondens, ideo excogitata fuit methodus inuertendi aequationes ad hanc formam

$$x = y + \alpha yy + \beta y^3 + \gamma y^4 + \delta y^5 + \text{etc.}$$

ita enim inuenitur

$$\begin{aligned} axx &= ayy + 2\alpha a y^3 + 2\beta a y^4 + 2\gamma a y^5 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad\quad + \alpha\alpha a y^4 + 2\alpha\beta a y^5 + \text{etc.} \\ bx^3 &= by^3 + 3\alpha b y^4 + 3\beta b y^5 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad\quad + 3\alpha\alpha b y^5 + \text{etc.} \\ cx^4 &= cy^4 + 4\alpha c y^5 + \text{etc.} \\ ex^5 &= ey^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Vnde ſi fuerit

(A) $y = x + axx + bx^3 + cx^4 + ex^5 + \text{etc.}$

erit ſubſtitutis ſingulorum terminorum valoribus

$$\begin{array}{llllll} y = y & +\alpha\, yy & +\beta\; y^3 & +\gamma\; y^4 & +\delta\; y^5 & + \text{etc.} \\ & +a & +2\alpha a & +2\beta a & +2\gamma a & \\ & & +b & +\alpha\alpha a & +2\alpha\beta a & \\ & & & +3\alpha b & +3\beta b & \\ & & & +c & +3\alpha\alpha b & \\ & & & & +4\alpha c & \\ & & & & +e & \end{array}$$

cuius aequationis identitas obtinetur, faciendo $\alpha = -a$, $\beta = 2a^2 - b$, $\gamma = -5a^3 + 5ab - c$, $\delta = 14a^4 - 21aab + 6ac + 3bb - e$ etc.

Igitur aequatio (A) aequipollet huic conuerſae:

(B) $x = y - ayy + (2a^2 - b)y^3 - (5a^3 - 5ab + c)y^4 + (14a^4 - 21aab + 6ac + 3bb - e)y^5 - \text{etc.}$

§. 3. Quamuis autem, quum in generalibus ſubſiſtimus non facile perſpiciamus legem, qua coefficientes aſſumti α, β, γ, δ etc. progrediuntur, niſi

niſi poſt multorum terminorum conſiderationem, tamen in caſibus particularibus ea ſaepe fit valdè obuia. Sic v. gr. cum aſſumitur aequatio

$$y = x + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \text{ etc.}$$

haec conuertitur ope aequationis (B) in hanc

$$x = y - \tfrac{1}{2}yy + \tfrac{1}{6}y^3 - \tfrac{1}{24}y^4 + \tfrac{1}{120}y^5 - \text{ etc.}$$

cuius progreſſionis lex inſpicienti cuiuis apparet. Prior docet ad dati numeri $\frac{1}{1-x}$ logarithmum (*y*) accedere, altera ad dati logarithmi (*y*) numerum $\frac{1}{1-x}$.

§. 4. Exemplum huius rei cum mihi aliquando occurreret, volui periculum facere, an aliquod hac in parte auxilium praeſtare poſſet methodus illa ſingularis, quam in Comment. Tom. 3. exhibui pro inueniendis radicibus aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, idque ſola terminorum additione vel ſubtractione continua, quod cum tentarem, vidi iſtam methodum minime nos deficere appropinquare volentes ad radicem aequationis ſine fine progredientis, dummodo certa ratione vtamur: in eo autem cardo rei vertitur, vt ſeries, quae ad leges loco citato exhibitas formanda eſt pro norma aequationis propoſitae, quaeque incipit a tot terminis arbitrariis, quot dimenſiones habet eadem aequatio, hic incipere fingatur ab infinitis nullionibus, quos omnes excipiat vnitas.

§. 5. Sit nempe rurſus aequatio (A) et in hac valor ipſius x proxime inueniendus, quod per aequationis conuerſionem contenditur. Dico deſiderato ſatisfactum iri, ſi aequationi (A) talis detur forma,

$$1 = \frac{1}{y}x + \frac{a}{y}xx + \frac{b}{y}x^3 + \frac{c}{y}x^4 + \frac{e}{y}x^5 + \text{etc.}$$

dein ponatur vnitas infinitis nullionibus ſubſequens hunc in modum

$$- - - - 0.\ 0.\ 0.\ 0.\ 1.$$

formeturque poſtea ſeries ita, vt quilibet terminus ſit aequalis aggregato ex ſuo praecedente multiplicato per $\frac{1}{y}$, eoque qui hunc praecedit multiplicato per $\frac{a}{y}$, et qui hunc praecedit multiplicato per $\frac{b}{y}$ atque ſic porro: ſeries haec eſt

$$- - - - 0.\ 0.\ 0\ 1.\ \frac{1}{y},\ \left(\frac{1}{yy} + \frac{a}{y}\right),\ \left(\frac{1}{y^3} + \frac{2a}{yy} + \frac{b}{y}\right)$$
$$\left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right),\ \left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^3} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \text{ etc.}$$

Quibus ſic factis, erit penultimus terminus diuiſus per vltimum prope aequalis valori quaeſito x, et eo quidem propius, quo plures fuerint termini. Erit itaque proxime

$$x = \left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right) : \left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^3} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \text{ vel}$$

$$(C)\quad x = \frac{y + 3ayy + (aa + 2b)y^3 + cy^4}{1 + 4\,y + (3aa + 3b)yy + (2c + 2ab)y^3 + ey^4},$$

et vbi maiori accuratione opus eſt facili negotio, et certe multo faciliori ſaepiſſime, quam ſi altera vtimur methodo, propius ad verum valorem accedemus. Lubet autem ad exempla nonnulla deſcen-

ſcendere, vt comparatio inter vtramque methodum inſtitui poſſit.

§. 6. Sit aequatio (D) $1 = \frac{r}{2.3} - \frac{rr}{2.3.4.5} + \frac{r^3}{2.3.4.5.6.7} - \frac{r^4}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{r^5}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} -$ etc., in quam aliquando directe nulla facta conuerſione incidi, et quae ita eſt comparata, vt ſi diameter circuli denotetur per vnitatem, incognita r exprimat quadratum circumferentiae. Inuenitur per methodum paragraphi tertii (poſito prius $\frac{r}{2.3} = q$, vt aequatio (C) obtineat formam aequationis (A) $q = \frac{1048067}{673750}$, ergo $r = \frac{6288402}{673750}$ ex quo ſequeretur circumferentia circuli $= 3.0550$. Quod ſi autem methodo noſtra calculum ponamus minore labore prodit numerus multo verior, nempe $q = \frac{4191}{2555}$, et $r = \frac{25146}{2555}$, atque circumferentia circuli $= 3.1376$.

Notabo hic in tranſitu, incognitam r in aequatione (D) non ſolum quadratum circumferentiae circuli, ſed et eiusdem duplum, triplum ac quoduis multiplum exprimere, ita vt illa aequatio infinitas habeat radices reales, quarum regula noſtra minimam indicat. *Conſ. Diſſ. de ſeriebus recurr.*

§. 7. Huic exemplo aliud adiungemus inuerſum, ſit ſcilicet radius circuli $= 1$, chorda arcus cuiuscunque $= x$, arcus ipſe $= z$; notum eſt conuenire hanc aequationem aptiſſimam

(D) $z = x + \frac{1}{3.2^3} x^3 + \frac{3}{5.2.2^5} x^5 + \frac{3.5}{7.2.3.2^9} x^7 + \frac{3.5.7}{9.2.3.4.2^{12}} x^9 + \text{etc.}$
Huius aequationis tres tantum terminos priores conſiderabimus in vtraque methodo, ita vt tum in formula communi (B) tum in noſtra (C) ſit ponendum $a = o$, $b = \frac{1}{24}$, $c = o$ et $e = \frac{3}{640}$; igitur ex illa fit $x = z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5$, ex hac vero $x = \frac{1920z + 160z^3}{1920 + 240zz + 9z^4} =$ (proxime) $z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5 + \frac{1}{7680} z^7$, ſic vt neutra notabiliter differat ab altera.

§. Data igitur circumferentia circuli non inepte adhibebuntur hae formulae pro inueſtigandis ſinibus ad datos arcus non admodum magnos: habent etiam formulae huiusmodi vſum in problematis geometricis ad circulum pertinentibus, vbi requiritur vt expreſſio algebraica pro ſinu vel chorda ex aſſumto arcu adhibeatur proxime ſatisfaciens; quod ſi enim arcum poſueris z pro radio 1, tuto aſſumes chordam $= z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5$, vel $= \frac{1920z + 160z^3}{1920 + 240zz + 9z^4}$, eiusdemque arcus ſinum $= z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5$ vel $= \frac{120 + 40z^3}{120 + 60zz + 9z^4}$. huiusmodi formulas ſed reciprocas, quae nimirum ex chorda arcuum proxime definiunt, iam olim dedit *Newtonus*, quas etiam ex aequatione (D) elicuiſſe mihi viſus eſt.

§. 9. Ex his perſpicuum eſt, ſatis apte methodum noſtram adhiberi pro radice inuenienda aequatio-

aequationum continuo progredientium, quandoquidem in his exemplis allatis multo rectius procedat, quam ordinaria. Qui autem haec et ſuperiora in Tom. II. expoſita recte aſſecuti fuerint, perſpicient terminorum omnium in infinitum aliquomodo rationem haberi propter vniformitatem legis, qua termini aequationis progrediuntur, quamuis in conſtructione radicis pauci termini adhibeantur. Et hoc quidem modo fit, quod certe mirabile eſt, vt quoties aequatio infinita ad finitam reduci poteſt, id ipſum hac methodo indicetur, ſimulque radix iuſta, recte ſe habentibus praemiſſis, conſtanter oriatur, vbicunque abrumaptur ſeriei paragraphi quinti conſtructio, quod a regulis conſuetis minime eſt expectandum. De hoc proxima occaſione agam; nunc finiam poſtquam monuero, ſuccedere poſſe, vt ſeries §. 5. non vergat ad naturam progreſſionis geometricae, quo in caſu non conuenit valor aequationis (C). Illud tunc fit quando radix illa, quam minimam in Diſſ. de ſeriebus recurrentibus vocaui, eſt imaginaria; quomodo autem huic incommodo obviam iri poſſit, in eadem docui Diſſertatione. His itaque et aliis ſimilibus non amplius immorabimur.

Dan. Bernoulli

NOTATIONES DE AEQVATIONIBVS, QVAE PROGREDIVNTVR IN INFINITVM, EARVMQVE RESOLVTIONE PER METHODVM SERIERVM RECVRRENTIVM: VT ET DE NOVA SERIERVM SPECIE.

Praelectio Secunda.

§. 1.

POſtquam in prima harum notationum mearum praelectione oſtendi modum generalem inuertendi aequationem, cuius alterutra indeterminata ceu incognita per omnes dimenſiones in infinitum transit, in praeſentibus potiſſimum monſtrabo egregium conſenſum atque nexum methodi noſtrae cum illis caſibus, quibus aequatio infinitorum terminorum in aliam ordinariam finitam transmutari poteſt. Hunc autem in finem quaedam praemittam circa nouum aliquod ſerierum genus.

§. 2. Conſtructio harum ſerierum in hoc generaliter conſiſtit, vt fingantur numeri data lege quacunque progredientes, quos ponam eſſe

(A) $a. b. c. d. e. f.$ etc.

ex his autem formetur talis ſeries

(B) $a.(aa+b).(a^3+2ab+c).(a^4+3aab+2ac+bb+d)$
$(a^5+4a^3b+3aac+3abb+2ad+2bc+e).(a^6+5a^4b$

$c+6$

$+ 4a^3c + 6aabb + 3aad + 6abc + b^3 + 2ae + 2bd + cc + f$ etc. quae ita eſt comparata, vt quilibet terminus conſtet ex aggregato omnium praecedentium ſuo ordine multiplicatorum per a, b, c, d, e, f, etc. et noui termini in ſerie (A) ſubſequentis. Ita v. gr. tertius terminus ſeriei (B) eſt aggregatum ex praecedente ($aa + b$) multiplicato per a, ex antepraecedente (a) multiplicato per b et ex nouo termino c ex ſerie data (A) depromto.

§. 3. Singularis eſt harum ſerierum proprietas, quod quoties ſeries (A) eſt algebraica, altera (B) fiat recurrens, ſeu exponentialis; atque adeo huius terminus generalis cum omnibus inde pendentibus praerogatiuis habeatur. Voco autem ſeriem algebraicam, cuius terminus generalis habetur expreſſus per quantitates algebraicas rationales ordinarias, quarum denominatores variabilis non ingreditur, cuiusmodi ſunt omnes ſeries numerorum figuratorum: ſeries recurrentes quandoque etiam nomine exponentialium deſigno, quod in termino generali variabilis eſt in exponente; ſi modo ſeries non ſit recurrens ſpuria. Pertinent enim ſeries algebraicae quoque ad recurrentes, quas tamen non vt recurrentes veras conſidero. Notabilem ſerierum noſtrarum praefatam indolem, poſtquam obſeruaſſem, tentaui modum generalem reducendi ſeriem B ad recurrentem ſub praedicta lege: nec ſucceſſus me fefellit, vti mox apparebit.

§. 4.

§. 4. Sumantur in ſerie (A) quorumuis duorum terminorum proximorum differentiae, quae conſtituent ſeriem; ex hac ſecunda ſerie eodem modo formetur tertia, ex hac quarta donec perueniatur ad differentiam conſtantem, quae natura eſt huiusmodi ſerierum. Sit autem primus terminus in prima ſerie a, in ſecunda α, in tertia β, in quarta γ et ſic porro, donec obtineatur ſeries vltima, cuius ſingulos terminos inter ſe aequales vocabo δ, numerum denique harum ſerierum deſignabo per l, vel numerum differentiationum per $l-1$. Notetur porro indicem ſeriei recurrentis, dici $m, n, p, q, --- r$, quando quiuis terminus aggregatum eſt ſui praecedentis per m, huiusque praecedentis per n, et eius qui hunc praecedit per p, et qui hunc per q, et ſic deinceps, donec terminus multiplicandus per r occurrat. His ita definitis, fiat ſeries recurrens, cuius termini initiales numero l iidem ſint qui in ſerieB, nempe a. $(aa+b)$, $(a^3+2ab+c)$, etc. et cuius index $m, n, p, q, --- r$, ſe habeat vt ſequitur.

$$m = a + \frac{l}{1}$$
$$n = \alpha - \frac{l-1}{1} a - \frac{l.l-1}{1.2}$$
$$p = \beta - \frac{l-2}{1} \alpha + \frac{l-1.l-2}{1.2} a + \frac{l.l-1.l-2}{1.2.3}.$$
$$q = \gamma - \frac{l-3}{1} \beta + \frac{l-2.l-3}{1.2} \alpha - \frac{l-1.l-2.l-3}{1.2.3} a - \frac{l.l-1.l-2.l-3}{1.2.3.4}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r = \delta \; ----- \pm \gamma \mp \beta \pm \alpha \mp a \mp 1.$$

Legem aequationum quiuis facile percipiet: notet autem

autem vbique duo ſigna vltima non reciprocari, et in poſtrema aequatione ſigna ſuperiora valere, cum l eſt numerus par, at inferiora, cum eſt impar. Regulam hanc generalem exemplis quibusdam illuſtrabimus.

Exemplum 1.

§. 5. Sumatur pro (A) ſeries vnitatum, erit $l=1$, $a=1$, reliquae autem litterae α, β, etc. $=0$, fiat ſeries recurrens, vel potius in hoc caſu geometrica, incipiens ab 1. cuius index ſimpliciter ſit $=a+\frac{1}{1}=2$, nempe 1. 2. 4. 8. 16. etc. vbi terminus generalis poſito x pro exponente termini eſt 2^{x-1} et quae conuenit cum ſerie (B).

Exemplum 2.

Exponat iam ſeries (A) numeros naturales 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. fit $l=2$, $a=1$, $\alpha=1$; $\beta=\gamma=$ etc. $=0$, ſumantur duo primi termini ſeriei (B) 1 et 3; et ex his conſtituatur ſeries recurrens, cuius index $=m$, $n=3,-1$, quae haec eſt 1. 3. 8. 21. 55. 144. etc. habens pro termino generali $((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^x - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^x):\sqrt{5}$, quae rurſus in praeſenti caſu cum aequatione (B) plane conſentit.

Exemplum 3.

Sit porro loco ſeriei (A), quae ſequitur 2. 2. 5. 11. 20. 32. etc. indicata generaliter per $\frac{3xx-9x+10}{2}$

 pro

pro qua valet $l=3$, $a=2$, $\alpha=0$, $\beta=3$ euaneſcentibus reliquis valoribus. Hic igitur incipiendo a tribus primis terminis ſeriei (B), qui ſunt 2, 6 et 21, et ex his formando ſeriem exponentialem, quae pro indice habeat 5, −7, 6, nempe hanc 2. 6, 21. 75. 264. 921. etc. deprehendimus adhuc, eam nequicquam differre a propoſita (B), cuius terminus generalis data radicum extractione facile inuenitur.

Exemplum 4.

Sit denique (A) 10. −25. −10. 31. 74. 95. 70. etc. repraeſentata per terminum generalem $-4x^3 + 49xx - 154x + 119$, vbi $l=4$, $a=10$, $\alpha=-35$, $\beta=50$, $\gamma=-24$, reliquis in nihilum abeuntibus. Exinde fit (B) 10. 75. 490. 2956. 16944. 93800. etc. Si vero ab huius ſeriei quatuor primis terminis incipiatur atque ex illis ſeries recurrens indicis 14, −71, 154, −120 formetur, haec eadem ſeries (B) orietur, cuius proin terminus generalis erit $-\frac{1}{3}(2)^{x-2} + 8(3)^{x-1} - \frac{81}{2}(4)^{x-1} + \frac{128}{3}(5)^{x-1}$.

Corollarium I.

§. 6. Si ſeries (A) terminus generalis ſit $\frac{x-1 \cdot x-2 \cdot x-3 \cdot \,----\, x-n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \,----\, n}$, conueniet ſeries (B) cum ſerie recurrente, cui index eſt $\frac{n+1}{1}$, $-\frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}$, $\frac{n+1 \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $-\frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ $----\pm 1 + 1$, et cuius termini primi numero $n+1$ ſunt 0. 0. 0.

- - - 1. ſic v. gr. ſi ſeries (A) fuerit numerorum trigonalium 0. 0. 1. 3. 6. 10. 15. 21. etc., erit ſeries (B) 0.0.1.3.6.11.21.42. etc., ad quam peruenitur ſi poſito $n=2$, formetur ſeries recurrens ex tribus numeris 0 0, 1, cuius index ſit 3, −3, 2: ſi fiat $n=3$, dat ſeries (A) tales numeros 0. 0.0.1.4.10.20.35. etc., altera (B) autem 0.0.0.1. 4.10.20.36, etc. quae ſeries recurrens eſt, cuius index eſt 4, −6, 4, 0. Notetur autem terminum vltimum in indice eſſe vel 2 vel 0, prout n fuerit numerus vel par vel impar.

Corollarium 2.

§. 7. Dantur etiam ſeries algebraicae (A) tales vt altera (B) vncias exhibeat binomii ad certam dignitatem eleuati omnibus terminis reliquis in infinitum euaneſcentibus. Ita ſi (A) eſt −1. −1. −1. −1. −1. −1. etc. fit (B) −1. 0. 0. 0. 0. etc. ſi (A) ponatur −1. −2. −3. −4. −5. etc. fit (B) −2. 1. 0. 0. 0. etc. et pariter ſi (A) −3. −6. −10. −15. −21. −28. etc. oritur (B) −3. 3. −1. 0. 0. 0. 0. 0. etc. Igitur omnes hae ſeries (B) quoque pertinent ad claſſem recurrentium, ſed ita tamen vt termini aliquot poſtremi in indice ſint conſiderandi, vt aequales nihilo. Hoc modo ſeries dicta numerorum −3. 3. −1. 0. 0. 0. 0. 0. etc. conſideranda eſt vt recurrens, quae habeat ſecundum regulam noſtram generalem §. 4. indicem 1. 0. 0. 0. ponendo ſcilicet $l=4$, $\alpha=-3$, $\alpha=-3$, $\delta=-1$, $\gamma=0$, quando-

 quidem

quidem ex his poſitionibus vtraque ſeries (A) et (B) oriatur.

Scholion.

§. 8. Si ſeries (A) ſit talis, vt eius termini ſinguli reales et progreſſionem algebraicam inter ſe formantes, ſint dato numero nullionum f interpolati, primumque terminum pariter datus numerus nullionum g praecedat, ſit ſeries (B) rurſus recurrens; ſi nempe ſeries talis o. o. - - - - o. a. o. o. - - o. b. o. o. - - o. c. o. o. - - o. d. o. etc. formeturque ex hac ſecundum legem §. 2. alia progreſſio conſiderando nulliones, vt terminos ſeriei non negligendos, habeantque ſe caeterum a, b, c, d etc. vt et $\alpha, \beta, \gamma - - - \delta$, nec non numerus l, vt dictum eſt in §. 4. erit ſeries (B) genita rurſus recurrens cuius indicem breuitatis cauſa non apponam generalem: exemplum tamen rei vnum alterumve apponam. Sit $f = 1$, $g = 0$, formentque litterae $a. b\ c. d.$ etc. ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4. etc. Eit ſeries (A) talis

1. o. 2. o. 3. o. 4. o. 5. o. 6. o. etc. ipſaque (B)

1. 1. 3. 5. 10 19. 36. 69. 131. 250. 476. etc.

quae recurrens eſt habens pro indice 1, 2, 0, −7;

Sit porro pro ſerie (A)

o, 1, o. o. 3. o. o. 6. o. o. 10. o. o. o 15. o. o. 21. etc.

ex qua generatur ſeries (B)

o. 1. o. 1. 3. 1. 6. 7. 9. 22. 46. 71. etc. cui ceu recurrenti index eſt o, 1, 3, 9, o, −3, o, o, −3, o, o, 1.

§. 9.

§. 9. Dictae autem ſeries algebraicae ſiue continuae ſiue interpolatae non ſolae ſunt quae alteram reddunt recurrentem: nam poſſunt etiam eſſe recurrentes qualescunque, haeque vt de algebraicis oſtenſum eſt, cum continuae, tum nullionibus interruptae. Sit v. gr. (A) 2.3.5 9.17.33.65. 129. etc. cuius ſeriei terminus generalis eſt $2^{x-1}+1^x$ ſiue $2^{x-1}+1$, quaeque adeo recurrens eſt, indice 3, −2 praedita: fit ſeries (B) 2.7.25.90. 325.1175.4250.15375. etc. quae itidem recurrens indicem habet 5, −5. Sin autem fuerit (A) 2.0.3.0.5.0.9.0.17.0.33. etc. oritur (B) 2.4.11. 28.73.189.491.1274.3308. etc. quae eſt ſeries exponentialis quarti ordinis, cui index eſt 2, 3, −3, −2.

§. 10. Tota denique res in hoc conſiſtit theoremate generali, vt ſi primus ſeriei (A) terminus intelligatur multiplicatus per x, ſecundus per x^2 tertius per x^3 et ſic in infinitum, ſicque habeatur $ax+bxx+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6$ etc. reſpiciendum ſit, an haec vltima ſeries infinita in ſummam finitam algebraice expreſſam reduci poſſit nec ne? ſi prius indicium eſt, ſeriem (B) recurrentem fore; tunc autem ſumma aequalis ſtatuenda eſt vnitati, poſteaque aequationi concilianda eſt haec forma $1=\alpha x+\beta xx+\gamma x^3+\delta x^4 ----+\phi x^l$, quo facto erit index ſeriei (B) ceu recurrentis $\alpha, \beta, \gamma, \delta ----- \phi$ pertinens ad ordinem l. Si vero expoſita ſeries $ax+bxx+cx^3$

 $+dx^4$

$+dx^4+ex^5+fx^6$ etc. in ſummam finitam algebraice expreſſam redigi non poſſit, erit ſeries (B) tranſcendens nec formula finita indicari poterit. Et in hoc quidem continetur, quicquid hactenus circa hanc rem monitum fuit.

Iam vero redeo ad id, quod potiſſimum conſtitueram; nempe ad modum in prima harum notationum parte expoſitum inuertendi aequationem ſine fine per omnes dimenſiones incognitae progredientem, oſtenſurus nunc aequationes infinitas, cum ad finitas redigi poſſint, etiamſi non mutatas non aliter tamen reſolui hac methodo, quam ſi prius ad formulam finitam fuiſſent reducta.

§. 11. Sit igitur aequatio propoſita reducta, quod ſemper fieri poteſt, ad hanc formam (M) $1=ax+bxx+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6+$ etc. Ponantur autem litterae coefficientes a, b, c, d, e, f, etc. progreſſionem formare, qualis §. 4. poſita fuit, reliquasque etiam, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta$, vt et l valores ſuos ibidem definitos ſeruare. Sic igitur fiet, vt omnes termini aequationis in ſummam finitam, quod notum eſt, redigi queant. Si vero lex ſummae in diuerſis caſibus recte obſeruetur, facile erit generaliter illam definire: hoc autem facto aequatio noua ita diſponatur, vt ab vna parte ſit vnitas et ab altera ſtent reliqui aequationis termini. Hoc modo aequatio propoſita (M) abit in hanc

$1(\frac{l}{1}x$

$$\begin{array}{l}
1\left(\frac{l}{1}x - \frac{l.\overline{l-1}}{1.2}xx + \frac{l.\overline{l-1}.\overline{l-2}}{1.2.3}x^3 - \frac{l.\overline{l-1}.\overline{l-2}.\overline{l-3}}{1.2.3.4}x^4 \mp x^l\right) \\
+a\left(x - \frac{l-1}{1}xx + \frac{\overline{l-1}.\overline{l-2}}{1.2}x^3 - \frac{\overline{l-1}.\overline{l-2}.\overline{l-3}}{1.2}x^4 - - \pm x^l\right) \\
(N)\,1 = +\alpha\left(\cdots\cdots xx - \frac{l-2}{1}x^3 + \frac{\overline{l-2}.\overline{l-3}}{1.2}x^4 \cdots\cdots \mp x^l\right) \\
+\beta\left(\cdots\cdots\cdots\cdots x^3 - \frac{l-3}{1}x^4 \cdots\cdots \pm x^l\right) \\
+\gamma\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x^4 \cdots\cdots \mp x^l\right) \\
\vdots \\
\vdots \\
+\delta\left(- x^l\right)
\end{array}$$

Sunt itaque aequationes (M) et (N) aequivalentes; quod ſi autem prior ſecundum leges §. 4. partis primae harum notationum, et poſterior ſecundum leges §. 12. diſſertationis de ſeriebus recurrentibus Tom 3. reſoluatur, modo numeri initiales requiſiti non differant, ex vtraque methodo ſimilis oritur ſeries. Conſenſus iſte clarius intelligetur, ſi valores §. 4. $m = a + \frac{l}{1}$, $n = \alpha - \frac{l-1}{1} - \frac{l.\overline{l-1}}{1.2}$ etc. coincidere cum coefficientibus quantitatum x, xx, etc in vltima aequatione (N) obſeruatum fuerit.

§. 12. Ex his modo dictis etiam fluunt, quae paragrapho 8. et 9 monita ſunt. Ceterum quod dixi §. 5. part. 1. pro inuenienda radice aequationis infinitae intelligendam eſſe vnitatem infinitis nullionibus impoſitam, id non ita ſtricte ſumendum eſſe, quaſi non loco ſimplicis vnitatis quotcunque numeri arbitrarii adhiberi poſſent, per ſe patet. Hinc etiam loco ſeriei (B) §. 2. po-

potuiſſet alia magis compoſita formari ex eadem ſerie (A) ſcilicet intelligendo praeter vnitatem numeros $p . q , r , \cdots s$ quoscunque, ex quibus ſeries eadem lege conſtruatur, qua ſeries (B) §. 2. ſimul autem intelligendo numeros $s - - - r , q , p , 1$ tanquam primos ſeriei terminos. Id vero ſi ita effectum fuerit, dico rurſus ſeriem (B) recurrentem fore, ſi ſeries (A) ſit vel algebraica vel exponentialis eaeque ſiue purae ſiue nullionibus interpolatae, et indicem ſeriei (B) non alium fore; attamen hoc reſpectu terminos $s - - - r , q , p , 1$ non cenſendos pertinere ad ſeriem (B) Quod vt exemplo magis explicemus, fingemus aequationem reſoluendam eſſe talem

$1 = x + 3xx + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 28x^7 +$ etc. Conſtruatur ſeries non incipiendo vt ante a ſimplici vnitate, ſed a numeris quotcunque arbitrariis, v. gr. ab 3. 2. 1. ſic vt ſit 3. 2. 1. 25. 70. 216. 679 2183. etc. quam dico rurſus recurrentem eſſe, ſi modo tres primi termini 3. 2. 1. aſſumti a ſerie excludantur; neque differre indicem ab eo, qui vi regulae §. 4. reperitur nempe eſſe in hoc caſu $4, -3, 1$. Poſſunt itaque innumeris modis aequationes infinitae reſolui, qui omnes indicant modum quo iſtae aequationes ad finitas reduci debeant, quoties id fieri poteſt. Solet autem methodus §. 5. part. 1. inter omnes eſſe maxime breuis.

§. 13. Et haec ſunt quae de ſerierum noſtrarum vſu in reſoluendis aequationibus infinitis

mo-

monenda habui. Finiam igitur haſce notationes poſtquam obiter quasdam notauero alias proprietates ſerierum (B) §. 2. definitarum. Patet quidem cum ſumma omnium terminorum ſeriei (A) finita eſt et cognita, ſummam quoque quotcunqne terminorum in altera (B) hinc innoteſcere conceſſa radicum extractione, quia fit exponentialis, id eſt, ex pluribus geometricis conflata. Singulare autem hac in re compendium eſt, quando ſumma omnium terminorum (B) deſideratur, neque enim haec amplius a radicum extractione vllo modo pendet ſed conſtanter eadem eſt, manente ſumma prioris. Omnem rem quiuis perſpiciet poſtquam notarit, ſeriem (B) conflatam eſſe ex $(a+b+c+d+e+f----)^1$, $(a+b+c+d+e+f----)^2$, $(a+b+c+d+e+f----)^3$ ----, id eſt ex omnibus dignitatibus rationalibus ſummae primae ſeriei (A). Igitur ſi haec ſumma fuerit $=S$, erit ſumma alterius (B) $=S+SS+S^3$ $+$ etc. $=\frac{S}{1-S}$.

§. 14. Idem certo modo valet pro ſeriebus magis compoſitis, quarum mentionem feci in paragrapho duodecimo, quando nempe ſeries (B) nón ex ſola vnitate ſed ex pluribus quantitatibus arbitrariis formatur. Ita ex. gr. quum ex ſerie (A) $a.b.c.d.e.f$ conſtruitur ſeries (B) incipiens a duobus terminis arbitrariis m, et n, ſcilicet $m.$ $n.$ $na+mb.$ $naa+mab+nb+mc.$ etc. erit huius

 ſumma

ſumma ſub prioribus conditionibus $= \frac{m+n-ma}{1-s}$, vel (ſi termini *m* et *n* non ad ſeriem pertineant) $= \frac{ms+ns-ma}{1-s}$. Id vero apparet ex eo, quod huiusmodi ſeries compoſitae ſemper reſolui poſſint in plures ſeries ſimplices multiplicatas per litteram aliquam conſtantem. Atque hoc modo reperitur ſumma ſeriei (B) conueniens quotcunque terminis arbitrariis $m, ----n. p. q. r.$ initialibus $= m --- + n + p + q + r + \frac{(m ------ + n + p + q + r)s}{1-s} - \frac{m ------ n + p + q.)a}{1-s} - \frac{(m ---- + n + p)b}{1-s} - \frac{(m ----- + n)c}{1-s} ----- \frac{-(m)\Phi}{1-s}$, vbi per Φ intelligitur terminus ſeriei (A) cuius exponens eſt numerus terminorum arbitrariorum vnitate diminutus: poteſt autem haec ſumma compendioſiori formula exprimi, nempe eſſe illam aequalem

$$\frac{m --- + n + p + q + r) - qa - p(a+b) - n(a+b+c) ---- m(a+b+c -- + \Phi)}{1-s}$$

SOLVTIO PROBLEMATIS CATOPTRICO-GEOMETRICI

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula III et IV. PRopoſuit, ſub finem anni proxime elapſi, *Clariſſ. Leutmannus* Problema aliquod Geometricum, cuius applicationemad vſus Catoptri-

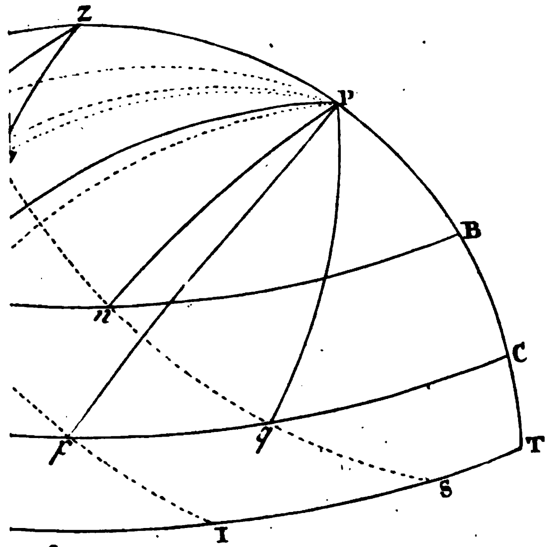


fig. 1.

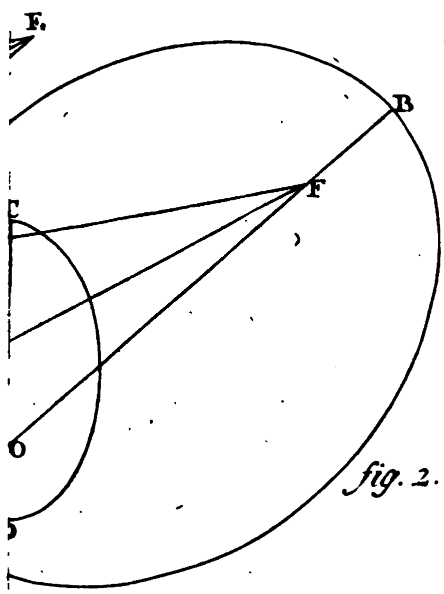


fig. 2.

optricos, non exigui momenti futuram eſſe aiebat. Solutionem eius ex Algebrae fontibus deriuaturus ſtatim vidi, eam ita comparatam eſſe, vt ad aequationes taedio plenas deducat, quaecunque fere optio incognitarum inſtituatur. Naturam vero huius problematis vlterius circumſpiciens deprehendi, id ex eorum numero eſſe, quae felicius *per Geometriam Linearem, abſque calculo procedentem*, ſoluantur, *quam per calculum Analyticum*; id quod *Cel. Hermannus* nuperrime in *Tomo IV. horum Commentariorum pag.* 47. exemplo ſingulari oſtendit, et pluribus adhuc confirmari poſſet.

§. 2. Problema autem *Clar. Leutmanni* hoc eſt: Sit angulus rectus ADC, huic angulo imponatur ſpeculum ſphaericum ABC ita, vt DA=DC. Deinde biſecetur arcus AC in B, ex B ducantur BE ipſi DC, et BF ipſi DA, parallelae. Quaeruntur iam in rectis indefinitis BE, BF, duo puncta E et F talia, vt ex eorum vtroque radii incidentes in C et A, in alterum punctorum quaeſitorum reflectantur. Tabula III. Fig. 1.

§. 3. Poſitis ergo, quae in §. 2. aſſumta ſunt, et ducta recta DG per puncta D et B data, transibit haec DG per centrum ſpeculi AC, et angulum rectum ADC biſecabit. Nam ductis chordis AB et BC erit in triangulis ABD, CBD, AD =CD, *per hyp.* AB=BC, *ob biſectum arcum ſpeculi* Fig. 2.

culi in B, et DB vtrique communis; ergo triangula ipſa aequalia erunt, et angulus ADB = angulo CDB, conſequenter vterque ſemirectus. Ducta igitur adhuc chorda AC, quae ſecet rectam DG in H, erit in triangulis ADH et CDH, rurſus AD = DC, ADH = CDH *per modo dem.* et DH communis vtrique; ergo rurſus triangula haec ipſa aequalia, conſequenter AH = HC, et AHD = CHD, hoc eſt, vterque rectus; quare recta DG chordam AC biſecat ad angulos rectos in H, atque idcirco per centrum arcus ABC, hoc eſt, per centrum ſpeculi, tranſibit.

Fig. 3. §. 4. Iam vero quaeſita puncta Problematis facillime ſic obtineri dico: *Per data tria puncta* A, C, *et* G, *deſcribatur circulus, ſecabit is lineas indefinitas* BE, BF, *in punctis deſideratis* E *et* F.

§. 5. Quod vt euincatur, demonſtrandum primo eſt, ducti circuli GAC centrum eſſe in recta DBG, iungente punctum biſectionis ſpeculi B, et verticem anguli recti D. Nam ponatur centrum ſpeculi, quod (§. 3.) eſt in recta DG, eſſe G, erit ob GA = GC, arcus AFG = arcui CEG; porro ob biſectum in B ſpeculum, erit angulus AGB = angulo CGB; hinc, quia circulus per tria puncta G, A, C, tranſit, erit etiam arcus AH = arcui CH. Ergo ob AFG = CEG. *per modo dem.* erit etiam HFG = HEG, atque idcirco vterque horum arcuum ſemicirculus, hoc eſt, DBG tranſit per centrum circuli HFGEH.

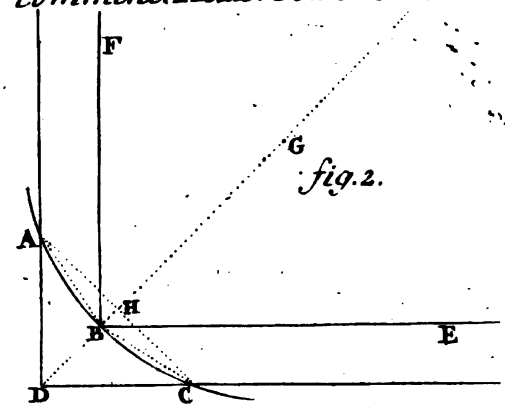
§. 6.

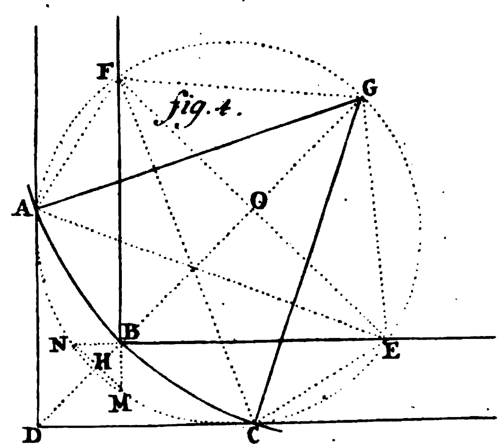
§. 6. Ducantur nunc ex inuentis punctis E et F rectae EC, EA, FA, FC, dico, fore vt, ſi EC et EA conſiderentur vt radii incidentes, eorum reflexi ſint CF et AF; et vice verſa, ſi FA et FC conſiderentur vt incidentes, eſſe eorum reflexos AE et CE. Nam productis EB et FB vsque dum occurrant circulo GFHE, in N et M, et ductis chordis NM et FE, quae ſecent diametrum in H et O, erunt anguli MNE et MFE aequales, quia eidem arcui MCE inſiſtunt. Ob eandem rationem aequales etiam ſunt anguli NMF et NEF, qui eidem arcui NAF inſiſtunt. Sunt vero etiam anguli circa B aequales, quia ſunt verticales; ergo triangulum HNB ſimile eſt triangulo BFO; et triangulum HMB ſimile eſt triangulo BEO, hinc erit analogia BN: NH = BF: FO: ſed ob angulum FBE biſectum per rectam BG, erit BF: FO = BE: OE, ergo habebitur BN: NH = BE: OE, vnde triangulum BNH ſimile erit etiam triangulo BEO; quare porro triangula BFO et BEO ſimilia erunt, et, ob latus BO commune, etiam aequalia; hinc BF = BE. Ex quo patet, puncta quaeſita F et E, aequaliter a puncto medio ſpeculi B eſſe remota. Ductis iam porro chordis FG, GE, erunt in triangulis BFG, BEG, BF = BE, *per dem.* angulus FBG = angulo EBG, *per dem.* § 3. et BG communis vtrique, quare haec triangula aequalia erunt, idcirco FG = GE, aut arcus FG = arcui GE. Si iam ducantur rectae GC et GA, erunt hi radii ſpeculi AC, et propterea normales punctorum Fig. 4.

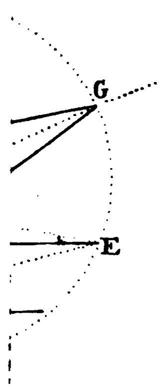
C et A. Sed anguli ECG, FCG; EAG, GAF, inſiſtunt arcubus aequalibus FG et GE, quare ipſi hi anguli erunt inter ſe aequales ex vtraque parte perpendicularium in ſpeculum GC et GA; atque idcirco ſi EC et EA conſiderentur vt radii incidentes, erunt, per reflexionis legem, eorum reflexi CF et AF; et vice verſa, ſi FA et FC conſiderentur vt incidentes, erunt eorum reflexi AE et CE. *Quod erat inueniendum et demonſtrandum.*

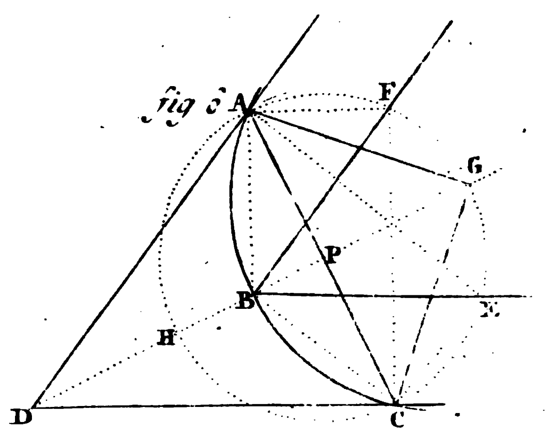
Fig. 5. §. 7. Quamuis vero *Clariſſ. Leutmannus* Problema hoc ad eum tantum caſum reſtrinxerit, quo angulus datus ADC rectus eſt: extenditur tamen eadem ſolutio ad omnes caſus, in quibus angulus datus ADC eſt obliquus vel obtuſus quiscunque; vti facile inuenietur, ſi quis ratiocinium hucusque adhibitum in angulo obliquo vel obtuſo qualicunque ADC repetere velit.

Fig. 6. §. 8. Imo vero, ſi loco ſpeculi ſphaerici adhibeatur aliud ABC iuxta curuam quamcunque, ita tamen, elaboratum, vt circa punctum medium eius B, rami BA, BC, vtrinque ſimiles ſint, et aequales, atque id angulo cuicunque ADC ita ſit impoſitum, vt rurſus DA=DC: eadem ſemper, quae antea, conſtructio locum obtinebit. Nam coniungantur puncta D et B per DG, biſecabit haec recta angulum ADC, et erit ſimul axis ſpeculi ABC. Ductis enim chordis BA,BC, et


F
G
fig. 2.
A
H
B
E
D
C


F
G
fig. 4.
A
O
N
B
E
H
M
D
C


G
E


fig 6
A
F
G
P
B
H
D
C

et AC, quae ſecet rectam DG in P, erit AD=CD *per hyp.* AB=CB, *quia rami* BA *et* BC *ſunt ſimiles et aequales*, et BD communis; quare DG biſecabit angulum ADC. Iam vero in triangulis ADP, CDP, anguli apud D aequales, et praeterea AD=CD, et DP communis; hinc dicta triangula aequalia et ſimilia; anguli ad P vtrinque aequales, hoc eſt, vterque rectus, et AP=PC, vnde fit vt ordinatim applicata AC in P biſariam ſecetur ſub angulo recto, et conſequenter ipſa DBG ſit axis huius curuae ABC.

§. 9. Ductis itaque, pro natura curuae ABC data, normalibus AG, CG, ex punctis A et C, ſecabunt illae axem BG in vno eodemque puncto G, quod facile ex arcubus curuae BA, BC, ſimilibus et aequalibus, *per hyp.* intelligitur. Inuento ſic puncto G, deſcribatur circulus, qui per data tria puncta A, G, C, transeat, ſecetque rectas BF, BE, in punctis F et E, erunt haec F et E iterum ipſa illa puncta quaeſita.

§. 10. Quod, vt confirmem, demonſtrandum primo rurſus eſt, centrum circuli AGC in axem DBG incidere debere. Nam ob puncta curuae A et C homologa, et arcus BA, BC, aequales et ſimiles, erunt normales AG, CG, aequales, vnde et arcus circulares AFG et CEG aequales quoque erunt. Eſt autem in triangulis DAG, DCG, DA=DC, AG=GC, et DG communis, quare angu-

lus

lus AGH = angulo CGH, et arcus circularis AH = arcui circulari HC, vnde arcus HAG = arcui HCG, hoc eſt, erit vterque ſemicirculus, et hinc HG diameter, quae conſequenter per centrum circuli AGC tranſit. Hinc pari ratiocinio, quo ante (§. 6.) euincitur, arcus FG et GE eſſe aequales. Ductis igitur rectis EC, EA, FA, FC, inſiſtent anguli ECG, FCG, GAE, FAG, arcubus circularibus aequalibus GF et GE, proinde erunt omnes aequales. Sunt vero GC et GA ad puncta C et A normales, *per conſtruct.* quare anguli ECG, GCF, erunt aequales, circa perpendicularem GC, hoc eſt, ſi radius EC conſideretur vt incidens, erit ipſius reflexus CF; quod pariter etiam de EA, FA, lineis verum eſſe patet.

Tabula IV. Fig. 1. §. 11. Cum autem rarius accidere ſoleat, vt ſpecula alia in vſus Catoptricos vocari ſoleant, quam ſphaerica, applicabo iam ſolutionem antea (§. 4.) inuentam ad caſum eum, qui frequentiſſime occurrere poteſt; nempe ad eum, cuius ſolutionem *Clariſſ. Leutmannus* requiſiuit. Sit in hunc finem angulus rectus ADC, ſpeculum ſphaericum impoſitum ABC, ita vt ſit DA = DC, rectae lateribus anguli parallelae ſint BF, BE; pro inueniendo puncto E ducatur radius CG, deinde ex puncto C recta alia CH, quae faciat angulum GCH aequalem dato HGC, et ſecet rectam BG in H, denique radio HC, centro H, deſcribatur arcus CE, ſecans

cans rectam BE in E, puncto deſiderato; alterum punctum F inuenietur ſumendo $BF = BE$. Nam per hanc conſtructionem obtinetur centrum circuli, qui per G, C, A, puncta, transire debet, in recta DG, prout eſſe debet, *iuxta* §. 5. et ob $HG = HC = HA$, tranſibit circulus ex H deſcriptus per indicata tria puncta.

§. 12. Ad praxin iuuandam, ſi fortaſſe aliqua ex his ſperanda ſit, indicabo ſequentem methodum, cuius ope pro quouis radio ſpeculi, et arcu ABC inquiri poteſt in diſtantiam puncti E aut F, a medio ſpeculi puncto B. Cum enim in G ſupponatur eſſe centrum ſpeculi ſphaerici, datis radio ſpeculi, et dimidio eius arcu BC, dabuntur in triangulo aequicuruo GHC, anguli aequales HGC, et GCH, nec non latus CG; vnde ex his inuenietur latus HG, quod ſubtractum a radio ſpeculi GB relinquet latus HB. In triangulo igitur HBE dabuntur HB, HE, latera, cum angulo conſtante $HBE = \frac{1}{2} ADC =$ ſemirecto, in hoc caſu; ex quibus inuenietur deſiderata diſtantia BE aut BF. Computaui hac methodo ſequentem laterculum, in quo radius ſpeculi ſphaerici BG ponitur eſſe partium 10000.

ABC Arcus.	BE	ABC Arcus	BE
2.°	7072.	18°	7157.
4.	7075.	20	7177.
6.	7080.	22	7198.
8.	7088.	24.	7222.
10.	7098.	26.	7248.
12.	7109.	28.	7275.
14.	7123.	30.	7304.
16.	7139.		

Fig. 2.

§. 13. Ille caſus, quo ſpeculi ſectio integrum quadrantem complet, ſimpliciſſimus eſt. Sit enim tale ſpeculum ABC, eius medium B, angulus rectus, cui impoſitus eſt, ADC, ita vt ſit DA = DC, centrum ſpeculi in G; deſcribatur ergo per tria puncta G, A, C, circulus GAC, ſecabit is rectas indefinitas BE, BF, in punctis quaeſitis E et F. Iam vero ob parallelas AG et KE, erunt arcus AK et GE aequales; ductis vero radiis incidentibus et reflexis EC, CF, EA, AF; formabuntur duo triangula EMC, et ELA, ſimilia; ſunt enim ad M et L recti anguli, et praeterea ECG, AEK, inſiſtunt modo dictis aequalibus arcubus, ergo ipſi anguli aequales. Hinc poſitis cognitis GC = GA = 1, MC = a, et incognita ME = x, erit MG = LA = $1-a$, quare ob dictam triangulorum ſimilitudinem orietur ſtatim analogia haec: MC (a) : ME (x) = EL ($1+x$) : LA ($1-a$) quare $x^2+x=a-a^2$, et hinc $ME = \pm\sqrt{(a-a^2+\frac{1}{4})}-\frac{1}{2}$.

DE

DE SVMMATIONE INNVMERABILIVM PROGRESSIONVM.

Auct. L. Eulero.

1.

QVae in praecedente diſſertatione de progreſſionibus transcendentibus earumque terminis generalibus tradidi, multo latius patent, quam videri poſſent; et inter alia quam plurima, ad quae accommodari poſſunt, eximius earum poteſt eſſe vſus in inueniendis ſummis innumerabilium progreſſionum. Quemadmodum enim in ſuperiore diſſertatione innumerae progreſſiones ad terminos generales ſunt reuocatae, quae communem algebram transcendunt; ita hic eandem methodum accommodabo ad terminos ſummatorios inueniendos progreſſionum, ad quas indefinite ſummandas communis algebra non ſufficit.

§. 2. Progreſſio quaepiam ſummari dicitur indefinite, ſi detur formula numerum indefinitum n continens, quae exponat ſummam tot terminorum illius progreſſionis, quot n comprehendit vnitates, ita vt ſi ponatur v. gr. $n = 10$ ea formula exhibeat ſummam decem terminorum a primo numeratorum. Formula haec vocatur terminus ſummatorius illius progreſſionis, atque eſt ſimul

terminus generalis progreſſionis, cuius terminus quicunque aequatur ſummae tot terminorum illius progreſſionis, quot eius exponens in ſe continet vnitates.

§. 3. Cum progreſſiones quaeque exponantur terminis generalibus, quaeſtio de ſummandis progreſſionibus eſt haec, vt ex termino generali terminus ſummatorius inueniatur. Etquidem iam eo eſt peruentum, vt, quoties terminus generalis eſt functio rationalis ipſius indicis n exponentes ſunt numeri integri affirmatiui, ſemper terminus ſummatorius inueniri queat. Quando autem exponentes ipſius n ſunt negatiui, niſi excipiantur pauci caſus, nemo adhuc terminos ſummatorios dedit. Ratio huius difficultatis eſt, quod tum termini ſummatorii plerumque algebraice exprimi nequeant, ſed tales requirant formas, quae quadraturas in ſe contineant.

§. 4. Aſſumatur haec forma $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$, tanquam terminus generalis cuiusdam progreſſionis; quae ſcilicet integrata, ita vt fiat $=o$ ſi $x=o$ poſitoque $x=1$ daret terminum ordine n. Progreſſio quae hoc modo ex ea formatur erit haec 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, etc. cuius ergo terminus generalis eſt formula aſſumta $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$

Series

Series vero haec inuenta ſummatoria eſt progreſſionis harmonicae $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ etc. cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{n}$. Quamobrem huius progreſſionis terminus ſummatorius erit $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$, qui illius eſt terminus generalis.

§. 5. Cum terminus generalis progreſſionis 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, etc. ſit $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$. Poterit ex hoc ea progreſſio interpolari, ſeu quilibet terminus medius inueniri: vt ſi requiratur terminus, cuius index eſt $\frac{1}{2}$, oportebit integrari $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} dx$ vel $\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, cuius integrale eſt $2\sqrt{x} - 2l(1+\sqrt{x})$ quod cum fiat $=0$ ſi $x=0$, ponatur $x=1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2} = 2-2l2$. Deinde, quia generaliter terminus ordine $n+1$, terminum ordine n ſuperat fractione $\frac{1}{n+1}$, erit terminus ordine $1\frac{1}{2} = 2\frac{2}{3} - 2l2$, et terminus ordine $2\frac{1}{2}$ hic $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} - 2l2$, etc. Series igitur interpolata erit

$$\overset{\frac{1}{2}}{2-2l2},\ \overset{1}{1},\ \overset{1\frac{1}{2}}{2+\frac{2}{3}-2l2},\ \overset{2}{1+\frac{1}{2}},\ \overset{2\frac{1}{2}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2}, \text{etc.}$$

§. 6. Ad hunc modum rem generalius complexus ſum, et aſſumſi formulam $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$, vbi P denotat functionem quamcunque ipſius x. Integrale hoc vt ſemper ita debet accipi vt poſito $x=0$; id totum fiat $=0$. Deinde hoc facto non

non vt ante pono $x=1$, ſed vt latius pateat pono $x=k$. Forma hoc modo reſultans erit terminus ordine n progreſſionis cuiusdam, cuius terminus generalis eſt forma aſſumta $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$. Progreſſio vero ipſa haec erit $k, k+\int P dx, k+\int P dx + \int P^2 dx$, etc. vbi in integralibus $\int P dx$, $\int P^2 dx$, etc. loco x iam poſitum eſſe k pono.

§. 7. Progreſſio inuenta, ſi quiuis terminus a ſequente ſubtrahatur, praebebit hanc $k, \int P dx$, $\int P^2 dx, \int P^3 dx$ etc. Huiusque terminus ſummatorius aequalis eſt termino generali praecedentis progreſſionis, cuius terminus generalis eſt $\int P^{n-1} dx$, haec formula $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$. Sit $P = x^\alpha : a^\alpha$ erit progreſſionis huius $k, \frac{k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)a^\alpha}, \frac{k^{2\alpha+1}}{(3\alpha+1)a^{2\alpha}}$ etc. terminus generalis $\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}}$ atque terminus ſummatorius hic $\int \frac{a^{n\alpha}-x^{n\alpha}}{(a^\alpha - x^\alpha)a^{n\alpha-\alpha}} dx$.

§. 8. Inuentus ergo eſt terminus ſummatorius pro omnibus progreſſionibus quorum termini ſunt fractiones, harumque numeratores progreſſionem geometricam, denominatores vero arithmeticam conſtituunt. Vt vero facilius ad omnes caſus accommodari poſſit, ſumatur haec progreſſio,

ſio, $\frac{b}{c}, \frac{b^{i+1}}{c+e}, \frac{b^{2i+1}}{c+2e}, \frac{b^{3i+1}}{c+3e}$, cuius terminus generalis eſt $\frac{b^{(n-1)i+1}}{c+(n-)e}$, comparetur hic cum illo $\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}}$ vel $\frac{c\,k^{(n-1)\alpha+1}}{(c+(n-1)\alpha c)\,a^{(n-1)\alpha}}$. erit $\alpha = \frac{e}{c}$ et $\frac{c\,k^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{a^{\frac{(n-1)e}{c}}} = b^{(n-1)i+1}$ atque $a = \left(\frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{b^{(n-1)i+1}}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} = \left(\frac{ck}{b}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}}\frac{k}{b^{ci:e}}$. Hic ne a pendeat ab n, debet enim a eſſe conſtans quantitas, oportet vt $\frac{ck}{b}$ ſit $=1$, erit ergo $k=\frac{b}{c}$, atque $a=\frac{b^{\frac{e-ci}{e}}}{c}$. Quocirca terminus ſummatorius eſt $\int \frac{b^{\frac{ne-nci}{c}} - c^{\frac{ne}{c}}x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e-ci)}{c}}\left(b^{\frac{e-ci}{c}} - c^{\frac{e}{c}}x^{\frac{e}{c}}\right)}dx$. Quae ita debet integrari vt fiat $=0$ ſi $x=0$, tum vero ponere oportet $x=\frac{b}{c}$.

§. 9. Cognita ſumma progreſſionis indefinita habebitur ſumma progreſſionis in infinitum, ſi ponatur $n=\infty$. Terminus quidem ſummatorius inuentus non magis ad hunc caſum quam ad aliumquemque accommodatus videtur. Eſt mihi vero alia methodus ſummas ſerierum infinitarum inueſtigandi, quae latiſſime patet. Sit ſeries $\frac{b}{c}+\frac{b^{i+1}}{c+1}+$

b^{2i+1}

$\frac{b^{2i+1}}{c+2e}$ etc. Ponatur numerus terminorum n, et ſumma eorum A. Augeatur numerus n vnitate, augebitur ſumma A termino ordine $n+1$, qui eſt $\frac{b^{ni+1}}{c+ne}$. Si nunc n et A tanquam quantitates fluentes conſiderentur, quia n eſt quaſi infinities maior quam 1, erunt earum differentialia dn et dA inter ſe vt augmenta 1 et $\frac{b^{ni+1}}{c+ne}$. Vnde prodit aequatio $dA=\frac{b^{ni+1}dn}{c+ne}$. Quae integrata dabit aequationem inter ſummam A et numerum terminorum n.

§. 10. Ponatur $l(c+ne)=z$, erit $\frac{edn}{c+ne}=dz$ atque $e+ne=g^z$ denotante g numerum, cuius logarithmus eſt 1. Eſt ergo $n=\frac{g^z-c}{c}$ et b^{ni+1} $=b^{\frac{g^zi-ci+1}{e}}=b^{\frac{e-ci}{e}}b^{\frac{g^zi}{e}}$, conſequenter $dA=$ $\frac{b^{\frac{e-ci}{e}}}{e}b^{\frac{g^zi}{e}}dz$. Haec quidem aequatio ita generaliter inſtituta integrationem niſi per ſeries non admittit. Si vero ponatur $i=0$, vt prodeat ſeriei $\frac{b}{c}+\frac{b}{c+e}+\frac{b}{c+2e}+$ etc., habebitur aequatio dA $=\frac{b}{e}dz$ et $A=\frac{b}{e}(z+lC)=\frac{b}{e}lC(c+ne)$. Conſtans quidem C non determinatur, ſed tamen

aequa-

aequatio ad definiendam differentiam inter duas ſummas inſeruit: vt ſit alius numerus terminorum m, et ſumma B erit $B = \frac{b}{e} l C (c + me)$. Ergo $A - B = \frac{b}{e} l \frac{c+me}{c+ne} = \frac{b}{e} l \frac{m}{n}$, quia m et n ſunt infinita.

§. 11. Maneat $i = o$, et progreſſio erit haec $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{c+e}$, $\frac{b}{c+2e}$, $\frac{b}{c+3e}$ etc. cuius terminus generalis eſt $\frac{b}{c+(n-1)e}$. Terminus autem ſummatorius eſt $\int \frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)e}{c}} (b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}})} dx$. Sumatur alia progreſſio $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{c+f}$, $\frac{b}{c+2f}$, $\frac{b}{c+3f}$ etc. cuius terminus generalis eſt $\frac{b}{c+(n-1)f}$ et ſummatorius $\int \frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{(n-1)f}{c}} (b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}})} dx$; in quo integrato itidem ponere oportet $x = k = \frac{b}{c}$. Addantur hae duae progreſſiones, ſcilicet terminus primus primo, ſecundus ſecundo, et ita porro prodibit haec progreſſio $\frac{2b}{c}$, $\frac{2bc+b(e+f)}{(c+e)(c+f)}$, $\frac{2bc+2b(e+f)}{(c+2e)(c+2f)}$ etc., cuius terminus generalis eſt $\frac{2bc+(n-1)b(e+f)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Terminus vero ſummatorius erit $= \int dx \left(\frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)e}{c}} (b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}})} + \frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{(n-1)e}{c}} (b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}})} \right)$

§. 12. Simili modo, ſed vniuerſalius, pro termino generali in cuius denominatore n duas tenet dimenſiones, inuenitur terminus ſummatorius, ſi illius progreſſionis p-cuplum ad huius q-cuplum addatur. Obtinebitur hoc modo progreſ-

ſio, cuius terminus generalis eſt $\frac{pb}{c+(n-1)e}+\frac{qb}{c+(n-1)f} = \frac{(p+q)bc+(n-1)b(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Terminus autem ſummatorius huic termino generali reſpondens erit

$$\int \frac{p\,dx}{b^{\frac{(n-1)e}{c}}}\left(\frac{b^{\frac{ne}{c}}-c^{\frac{ne}{c}}x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{e}{c}}-c^{\frac{e}{c}}x^{\frac{e}{c}}}\right)+\int\frac{q\,dx}{b^{\frac{(n-1)f}{c}}}\left(\frac{b^{\frac{nf}{c}}-c^{\frac{nf}{c}}x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{f}{c}}-c^{\frac{f}{c}}x^{\frac{f}{c}}}\right)$$

$$=\int dx\left(\frac{pb^{\frac{n(e+f)}{c}}-pb^{\frac{n(e+f)-f}{c}}c^{\frac{f}{c}}x^{\frac{f}{c}}-pb^{\frac{nf}{c}}c^{\frac{ne}{c}}x^{\frac{ne}{c}}+pb^{\frac{(n-1)f}{c}}c^{\frac{ne+f}{c}}x^{\frac{ne+f}{c}}+qb^{\frac{n(e+f)}{c}}-qb^{\frac{n(e+f)-e}{c}}c^{\frac{e}{c}}x^{\frac{e}{c}}-qb^{\frac{ne}{c}}c^{\frac{nf}{c}}x^{\frac{nf}{c}}+qb^{\frac{(n-1)e}{c}}c^{\frac{nf+e}{c}}x^{\frac{nf+e}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e+f)}{c}}(b^{\frac{e}{c}}-c^{\frac{e}{c}}x^{\frac{e}{c}})(b^{\frac{f}{c}}-c^{\frac{f}{c}}x^{\frac{f}{c}})}\right).$$

Ponatur $b=1$ hoc enim modo vniuerſalitati nihil decedit, eritque terminus generalis $\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Sit $cx=y$, erit $dx=\frac{dy}{c}$. Atque terminus ſummatorius habetur

$$=\int\frac{dy}{c}\left(\frac{p+q-py^{\frac{f}{c}}-qy^{\frac{e}{c}}-py^{\frac{ne}{c}}-qy^{\frac{nf}{c}}+qy^{\frac{ne+f}{c}}+qy^{\frac{nf+e}{c}}}{(1-y^{\frac{e}{c}})(1-y^{\frac{f}{c}})}\right)$$

in qua formula integrata, ita vt poſito $y=0$ ea quoque fiat $=0$, oportet ponere $y=1$.

§. 13. Aſſumatur iam terminus generalis hic $\frac{\alpha+\beta n}{\gamma+\delta n+\varepsilon nn}$. Qui comparatus cum $\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$ dabit $c=\sqrt{(\gamma+\delta+\varepsilon)}$, $e=\frac{\delta+2\varepsilon+\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\varepsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\varepsilon)}}$, $f=\frac{\delta+2\varepsilon-\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\varepsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\varepsilon)}}$ $p=\frac{\alpha\delta-\beta\delta+2\alpha\varepsilon-2\beta\gamma+(\alpha+\beta)\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\varepsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\varepsilon)}(\delta\delta-4\gamma\varepsilon)}$ atque $q=\frac{\beta\delta-\alpha\delta+2\beta\gamma-2\alpha\varepsilon+(\alpha+\beta)\sqrt{\delta\delta-4\gamma\varepsilon}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\varepsilon)}(\delta\delta-4\gamma\varepsilon)}$. His in termino ſummatorio ſubſtitutis, prodibit terminus ſummatorius huius

huius progreſſionis $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta+\varepsilon}$, $\frac{\alpha+2\beta}{\gamma+2\delta+4\varepsilon}$, $\frac{\alpha+3\beta}{\gamma+3\delta+9\varepsilon}$, etc. cuius terminus generalis eſt $\frac{\alpha+\beta n}{\gamma+\delta n+\varepsilon nn}$.

§. 13. Eodem modo ſi in termino generali n plures duabus dimenſiones habuerit, eruetur terminus ſummatorius, combinandis tot progreſſionibus ſimplicibus, quot dimenſiones n habere debet, quemadmodum idem in caſu duarum dimenſionum factum eſt. Attamen hac ratione non ad quasuis, quae in huiusmodi terminis generalibus contineri videntur, ſeries perueniri poteſt. Nam quoties denominator $\gamma+\delta n+\varepsilon n^2+\zeta n^3+\eta n^4$ etc. duos pluresue habet factores ſimplices aequales, tum progreſſio in tot ſimplices progreſſiones reſolui nequit, neque igitur eius terminus ſummatorius inueniri.

§. 14. Hanc ob rem aliam tradam methodum, quae hos caſus non excludat. Sit progreſſio quaedam ſimplex $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b}$ etc. cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{a+(n-1)b}$. Huius terminus ſummatorius erit $\int \frac{1-a^{\frac{nb}{a}}x^{\frac{nb}{a}}}{1-a^{\frac{b}{a}}x^{\frac{b}{a}}}dx$, vel ponatur $ax = y$, erit is $\int \frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\cdot\frac{dy}{a}$, in quo integrato poni oportet $y=1$. Multiplicetur hic in $y^\alpha dy$ et ſumma huius facti $\int y^\alpha dy \int \frac{dy}{a}\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ erit ſecundum

modum deſcriptum tractata terminus ſummatorius huius progreſſionis $\frac{a}{a\beta a}$, $\frac{a}{(a+b)(\beta a+b)}$, $\frac{a}{(a+2b)(\beta a+2b)}$ etc. poſito breuitatis ergo β loco $\alpha+2$. Huius progreſſionis terminus generalis eſt $\frac{a}{(a+(n-1)b)(\beta a+(n-1)b)}$ vel

$$\frac{a}{b^2n^2+(ab+\beta ab-2bb)n+(a-b)(\beta a-b)}.$$

§. 15. Aſſumamus progreſſionem generalem huius generis, quae facilius ad caſus quosuis adaptatur, ſit eius terminus generalis $\frac{1}{a+(n-1)b+\frac{(n-1)(n-2)}{2}c}$. Hic cum illo termino generali comparatus dabit $a=\frac{(2b-c)^2-4ac+(2b-c)\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}{4c}$ $b=\frac{2b-c+\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}{4}$, $\beta=\frac{2b-c-\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}{2b-c+\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}$. Hi valores ſi ſubſtituantur loco a, b, et α, (eſt vero $\alpha=\beta-2$) in $\int y^\alpha dy\int\frac{dy}{a}\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ prodibit terminus ſummatorius progreſſionis propoſitae, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b+c}$, $\frac{1}{a+3b+3c}$ etc.

§. 16 Hoc modo vlterius progredi licet; multiplicetur $\int\frac{dy}{a}\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ in $y^{\alpha-2}dy$, et facti integrale $\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a}\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ denuo in $y^{\beta-\alpha-1}$ huiusque producti integrale $\int y^{\beta-\alpha-1}dy\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a}$

$\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$, erit terminus ſummatorius progreſſionis huius $\frac{a^2}{a.\alpha a.\beta a}$, $\frac{a^2}{(a+b)(\alpha a+b)(\beta a+b)}$, $\frac{a^2}{(a+2b)(\alpha a+2b)(\beta a+2b)}$ etc. cuius terminus generalis eſt $a^2:(a+(n-1)b)(\alpha a+(n-1)b)(\beta a+(n-1)b)$ ſimiliter $\int y^{\gamma-\beta-1}dy\int y^{\beta-\alpha-1}dy\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a}\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ eſt terminus ſummatorius progreſſionis, cuius terminus generalis eſt $\frac{a^2}{(a+(n-1)b)(\alpha a+(n-1)b)(\beta a+(n-1)b)(\gamma a+(n-1)b)}$. Hoc igitur modo ad omnes progreſſiones peruenitur, quarum termini ſunt fractiones, numeratoribus exiſtentibus numeris conſtantibus, denominatoribus autem conſtituentibus quamcunque progreſſionem algebraicam.

§. 17. Si ſummae huiusmodi progreſſionum in infinitum continuatarum deſiderentur, oportet ponere $n =$ infinito. Hoc poſito poſtremum cuiusque termini ſummatorii membrum ſcilicet $\int\frac{dy}{a}\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ transmutabitur in hoc $\int\frac{dy}{a(1-y^{\frac{b}{a}})}$. Quia enim y ſemper eſt minus quam 1, praeter caſum vltimum, quo fit $y=1$, euaneſcet $y^{\frac{nb}{a}}$ prae 1. atque ideo $1-y^{\frac{nb}{a}}$ abibit in 1. Propterea huius ſeriei $\frac{a}{a.\alpha\beta}+\frac{a}{(a+b)(\alpha a+b)}+\frac{a}{(a+2b)(\alpha a+2b)}+$ etc. in infinitum ſumma erit $\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a(1-y^{\frac{b}{a}})}$, et

huius $\frac{a^2}{a.\ \alpha a.\ 6a}+\frac{a^2}{(a+b)(\alpha a+c)(6a+c)}+\frac{a^2}{(a+2b)(\alpha a+2b)(6a+2b)}$ + etc., ſumma erit $\int y^{6-\alpha-1}y\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a(1-y^{\frac{b}{a}})}$ et ita de reliquis omnibus.

§. 18. Sit $b=a$, vt fiat $\frac{b}{a}=1$, erit $\int\frac{dy}{a(1-y)}$ $=A-\frac{1}{a}l(1-y)$. Quia poſito $y=o$ totum integrale fieri debet $=o$, erit $A=o$, adeoque $\int\frac{dy}{a(1-y)}=$ $-\frac{1}{a}l(1-y)$. Multiplicetur hoc in $y^{\alpha-2}dy$ habebitur $-\frac{y^{\alpha-2}dy}{a}l(1-y)$. Huius integrale vt inueniatur ponatur $1-y=z$, erit $y=1-z$, habebitur igitur integrandum $\frac{(1-z)^{\alpha-2}dz}{a}lz=(1-\frac{(\alpha-2)}{1}z+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.\ 2}z^2-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.\ 2.\ 3}z^3+\text{etc.})\frac{dz}{a}lz$. Quia vero $z^\eta dzlz=C-\frac{z^{\eta+1}}{(\eta+1)^2}+\frac{z^{\eta+1}lz}{\eta+1}$, erit illius integrale haec ſeries $\frac{1}{a}(C-z+zlz+\frac{(\alpha-2)}{1.4}z^2-\frac{(\alpha-2)}{1.2}z^2lz-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.\ 2.\ 9}z^3+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\ 2.\ 3.}z^3lz+\text{etc.})$ Hoc integrale ſi fiat $y=o$ ſeu $z=1$ debet fieri $=o$, hanc ob rem erit $C=1-\frac{(\alpha-2)}{1.\ 4.}+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.\ 2.\ 9}$ $-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 16}$ etc.

§. 19. Perſpicuum eſt ex hoc integrali, quoties α ſit numerus integer vnitate maior, tum ſemper integralis eius terminorum numerum fore finitum, atque ideo ſummam progreſſionis definiri. Attamen etiamſi terminorum numerus ſit infi-

infinitus, ſumma propoſitae ſeriei dabitur per aliam ſeriem infinitam quae vero plerumque magis conuergit quam propoſita, atque ideo perquam eſt vtilis ad ſummam determinandam.

§. 20. Sit ſumma progreſſionis in infinitum continuatae $\int \frac{-y^{\alpha-2}}{a} dy\, l(1-y)$, quia hic eſt poſitum $b=a$, erit progreſſio ipſa $\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{2(\alpha+1)^{\alpha}} + \frac{1}{3(\alpha+3)^{\alpha}} + \frac{1}{4(\alpha+4)^{\alpha}}$ etc. Huius ſumma habetur ſi in illo integrali ponitur $y=1$, ſed facto $y=1-z$ eſt integrale illud $\frac{1}{a}\Big(1 - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} -$ etc. $- z + \frac{(\alpha-2)}{1.4} z^2 - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} z^3 +$ etc. $+ z\,lz - \frac{(\alpha-2)}{1.2} z^2\,lz + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.} z^3\,lz -$ etc.$\Big)$. Si iam fiat $y=1$, vel $z=0$ erit ſumma ſeriei $\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{2(\alpha+1)^{\alpha}} + \frac{1}{3(\alpha+2)^{\alpha}}$ etc. aequalis ſummae huius ſeriei $\frac{1}{a} - \frac{(\alpha-2)}{1.4.a} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9.a}$ etc. vel ſumma huius $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2(\alpha+1)} + \frac{1}{3(\alpha+2)}$ etc. aequalis ſummae huius $1 - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9}$ – etc.

§. 21. Praeterea alium habeo modum ſeries valde conuergentes inueniendi, quarum ſumma aequalis ſit ſeriei propoſitae. $\int -y^{\alpha-2} dy\, l(1-y)$ aequatur ita integratum vt fiat $=0$ ſi $y=0$ huic ſeriei $1 - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.2.3.16} +$ etc. $- z + \frac{(\alpha-2)}{1.4} z^2 - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} z^3 + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.2.3.16} z^4 -$ etc. $+ z\,lz - \frac{(\alpha-2)}{1.2} z^2\,lz + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3} z^3\,lz - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.2.3.4} z^4\,lz +$ etc. exiſtente $z=1-y$; ſed cum ſit $-l(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}$ etc. erit $\int -y^{\alpha-2} dy\, l(1-y) =$

$= \frac{y^\alpha}{\alpha} + \frac{y^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} + \frac{y^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)}$ etc. Haec ſeries ſi α eſt numerus affirmatiuus eſt aequalis illi quicquid ſit y, et ita multis modis ſeries eiusdem ſummae reperiuntur, quarum altera alterius ope facilius ſummatur.

§. 22. Exemplo rem illuſtrabo ſit $\alpha = 1$, habebitur trium ſequentium ſerierum ſumma aequalis huic

$$+1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \text{ etc.}$$
$$-z - \frac{1}{4}zz - \frac{1}{9}z^3 - \frac{1}{16}z^4 \text{ etc.} \quad = \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \text{etc.}$$
$$+ zlz + \frac{1}{2}z^2 lz + \frac{1}{3}z^3 lz \text{ etc.}$$

Quia vero eſt $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3$ etc. $= -l(1-z) = -ly$ erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{y+z}{1} + \frac{y^2+z^2}{4} + \frac{y^3+z^3}{9} + \frac{y^4+z^4}{16} +$ etc. $+ ly\,lz$, eſt hic $y+z=1$, et manifeſtum eſt tales loco y vel z numeros aſſumi poſſe, vt ſeries maxime conuergat. Id vero euenit quando $y=z$ vel vtrumque $= \frac{1}{2}$, eritque hoc caſu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. $= 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + \frac{1}{128} + \frac{1}{400} +$ etc. $+ \square lz$. Hoc modo ſumma progreſſionis $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. valde prope haberi poteſt, eſt enim $l2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16}$. Summa progreſſionis $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{36}$ etc. eſt quam proxime $= 1,164481$ et $\square l2 = 0,480453$; ergo ſumma ſeriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. eſt $= 1,644934$ $q.p.$ Si quis autem huius ſeriei ſummam addendis aliquot terminis initialibus determinare voluerit, plusquam mille termi-

nos

nos addere deberet, quo noſtrum inuentum numerum reperiret.

§. 23. Ex his igitur methodum percipere licet, quomodo cuiuslibet progreſſionis, cuius termini ſunt fractiones, quarum denominatores conſtituunt progreſſionem quamcunque algebraicam, terminum ſummatorium inueniri oporteat. Equidem vt hic rem conſiderauimus, numeratores deberent eſſe quantitates conſtantes; ſed non difficulter haec methodus extendetur ad eas quoque progreſſiones, in quibus numeratores ptogreſſionem etiam quamcunque algebraicam faciunt. Propterea haec methodus ad omnes progreſſiones quarum termini generales algebraice poſſunt exponi, accommodari poteſt, eiusque ope termini ſummatorii inueniri. Excipiendi tamen ſunt caſus, quibus terminus generalis irrationalis eſt.

DISSERTATIO BREVIS

DE MOTIBVS CORPORVM RECIPROCIS SEV OSCILLATORIIS, QVAE VBIQVE RESISTENTIAM PATIVNTVR QVADRATO VELOCITATIS SVAE PROPORTIONALEM.

Vbi oſtenduntur Theoremata, quorum ope expedite ad calculum reuocantur motus pendulorum in mediis perfecte fluidis praeſertim aëre ceu medio tenuiſſimo.

AVCTORE

Dan. Bernoulli

I.

Tabula IV. INſeruit *Newtonus* Libro ſecundo *Princ. Math. Phil. Nat.* ſectionem, quae ſexta eſt, *de motu et reſiſtentia corporum funependulorum*, vbi praeſertim operam dedit explicandae theoriae, quae reſiſtentias quadratis velocitatum proportionales facit, neque id immerito, quandoquidem iſta hypotheſis valeat pro plerisque fluidis, veluti aqua, mercurio, aëre, oleis calidis aliisque, eamque eo accuratius conuenire oſtendunt experimenta ad calculum reuocata, quo celerius corpora mouentur. Haec igitur mihi, poſtquam incidiſſem in theorema illud Tomo IV. Commentariorum pag. 136. inſertum, occaſionem dederunt explorandi quaenam theoremata alia circa

mo-

motum corporum pendulorum in mediis reſiſtentibus fluidiſſimis exinde deduci poſſent et quodnam compendium in hisce calculis, qui prolixi admodum eſſe ſolent, expectandum eſſet. Communicabo hic, quae mihi talia tentanti ſe manifeſtarunt, poſtquam theorema ipſum huc transſcripſero.

Theorema.

§. 2. Sit curua qualiscunque *a* A C *c*, in qua“ Fig. 2.
corpus ita moueri ponatur, vt vbique reſiſten-“ tiam offendat quadrato velocitatis ſuae propor-“ tionalem: incipiat primo deſcendere grauitate ſua“ in A, perueniatque priusquam retrogrediatur in“ C, dein deſcendere incipiat idem corpus in *a*,“ aſcenſuque ſuo integro perueniat in *c*, ducantur“ verticales A*b* et C*d*, atque horizontales *ab* et“ *cd* ſintque omnia haec elementa infinite parua.“ Dico fore ſemper ſpatium percurſum AC pro-“ portionale logarithmo rationis A*b* ad C*d*, id“ eſt, ſi ſymbolis vtamur intelligaturque per *n*“ numerus conſtans, quem in ſchediasmate citato“ §. 5. definiui, ſimulque dicantur A*b* et C*d*, *dx*“ et *dy*, fore arcum percurſum $AC = \frac{1}{2n}\log.\frac{dx}{dy}$. “

Problema.

§. 3. Dato arcu deſcenſus corporis in cycloide oſcillantis, inuenire arcum aſcenſus in praeſenti reſiſtentiarum hypotheſi.

Solutio.

Tabula IV. Fig. 4.

Oſcilletur corpus in cycloide QDG, ſit diameter circuli generatoris DH, quae ponitur verticalis $= a$, in qua ſi ſumantur abſciſſae, ducanturque ab vtraque parte applicatae horizontales, vti figura exhibet, erit per naturam cycloidis, vbique $DA^2 = 4a \times DM$; vnde ſi corpus ex punctis infinite propinquis A et a delapſum aſcenſus ſuos *reſpectiue* perficere ponatur vsque in C et c, dicaturque arcus deſcenſus $DA = t$, arcus aſcenſus reſpondens $DC = s$, $Aa = dt$ et $Cc = ds$, erit per praecedens theorema $t + s = \frac{1}{2n} \log. \frac{Ab}{Cd}$ $=$ (per naturam cycloidis) $\frac{1}{2n} \log. \frac{tdt}{sds}$. Ponatur numerus, cuius logarithmus eſt vnitas $= c$, erit $c^{2n(t+s)} = \frac{tdt}{sds}$; hinc $c^{-2nt} tdt = c^{2ns} sds$, quae recte reducta dat $2nc^{-2nt} t + c^{-2nt} = -2nc^{2ns} s + c^{2ns}$. Ex qua aequatione per methodos paſſim traditas valor litterae s qua lubet accuratione haberi poteſt. Caeterum ſi aequatio differentialis vltima comparetur cum aequatione integrali, obtinetur alia differentialis quae facilius in ſeries reſoluitur, nempe haec $\frac{tdt}{1 + 2nt} = \frac{sds}{1 - 2ns}$, ſiue $tdt - 2nttdt + 4nnt^3dt - 8n^3t^4dt +$ etc. $= sds + 2nssds + 4nns^3ds + 8n^3s^4ds +$ etc., quae per integrationem mutatur in hanc $\frac{1}{2}tt - \frac{2}{3}nt^3 + \frac{4}{4}nnt^4 - \frac{8}{5}n^3t^5 +$ etc. $= \frac{1}{2}ss + \frac{2}{3}ns^3 + \frac{4}{4}nns^4 + \frac{8}{5}n^3s^5 +$ etc. Q. E. I.

Theo-

Theorema.

§. 4. Corpus quod in cycloide quacunque oſcillatur eadem conſtanter in excurſionibus decrementa ſumit ſi arcus deſcenſus ſint aequales, id eſt, ſi in diuerſis cycloidibus arcus deſcenſus ſint aequales, ſunt etiam arcus aſcenſus aequales.

Demonſtratio.

Oppido liquet ex praecedente problemate, quandoquidem littera *a* diametrum circuli generatoris denotans ex computo euanuerit.

Scholion.

§. 5. Cum facillimum ſit theorema iſtud experimento confirmare, rem tentaui ſequentem in modum. Globum e filo tenui ſuſpenſum in aqua vibraui, ita tamen vt arcus deſcenſus nec admodum magnus eſſet reſpectu longitudinis fili, quo ſine notabili errore arcus circulares deſcripti pro cycloidicis haberi poſſent, nec tamen minimus, ne motus eſſet lentiſſimus, in quo caſu fluidorum reſiſtentia non amplius ſat accurate ſequitur rationem quadratorum velocitatum; ſicque differentiam obſeruaui inter arcum deſcenſus et arcum aſcenſus: mox vero eundem globum ſed longe breuius ſuſpenſum in aqua ita rurſus vibraui, vt arcus deſcenſus idem eſſet qui antea, tuncque ad normam theorematis arcum aſcenſus ſimilem quoque obſeruaui. Dein in aëre quia differentia minima inter vtrumque arcum obſeruari nequit ſa-

tis accurate, numeraui in corpore ſphaerico oſcillante et ex diuerſis altitudinibus ſuſpenſo ſingula vicibus ſuſpenſionis centum oſcillationes, poſt quas vltimae oſcillationes ſemper inter ſe ab vtraque parte aequales erant, cum primae inter ſe pariter aequales fuerant. In huiusmodi experimentis curandum eſt, vt corpus pendulum ex puncto firmo filoque tenui ſuſpenſum ſit, oſcillationesque fiant in eodem plano cum filo; facile enim oſcillationes ſimplices in motum turbinatorium abeunt deſcribente corpore figuram ellipſi formem, vel veram ellipſin, ſi filum ſuſpendens vt infinite altum ratione corporis excurſionum conſiderentur. Singulare corporibus turbinantibus accidit, quod axis figurae oblongae a corpore deſcriptae perpetuo in gyrum agatur in eandem plagam, ſi bene memini, qua corpus mouetur, ſicque imitantur motum planetarum, quorum aphelia et perihelia ſimiliter locum mutant; iſtud autem corporis turbinantis phaenomenon tribui attritui fili contra ſuſpenſionis locum.

Theorema.

§. *6.* Si corpus in medio admodum tenui arcus cycloidicos deſcribat, erit ſemper exceſſus minimus arcus deſcenſus ſuper arcum aſcenſus proportionalis quadrato arcus deſcenſus vel ſimpliciter proportionalis altitudini verticali deſcenſus.

De-

Demonſtratio.

Quum medium eſt tenuiſſimum, ſit valor litterae n minimus; vt vero appareat quid ab hac poſitione reſultet notari debet, eſſe $c^{-2nt} = 1 - 2nt + \frac{4nntt}{1.2} - \frac{8n^3t^3}{1.2.3} + \frac{16n^4t^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$ ſimiliterque $c^{2ns} = 1 + 2ns + \frac{4nnss}{1.2} + \frac{8n^3s^3}{1.2.3} + \frac{16n^4s^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$ Iam vero ſi vtamur aequatione differentiali paragraphi tertii, quae eſt $c^{-2nt}t\,dt = c^{2ns}s\,ds$, ſufficiet ex iſtis ſeriebus infinitis duos primos accipere terminos, (quia nempe valor n minimus eſt) atque ſic ponere $c^{-2nt} = 1 - 2nt$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns$, hosque valores in aequatione ſubſtituere, quae ſic transmutatur in hanc $tdt - 2nttdt = sds + 2nss\,ds$, cuius integralis eſt $\frac{1}{2}tt - \frac{2}{3}nt^3 = \frac{1}{2}ss + \frac{2}{3}ns^3$. Quod ſi vero vtamur aequatione tertii paragraphi integrata, nempe $2nc^{-2nt}t + c^{-2nt} = -2nc^{2ns}s + c^{2ns}$ non amplius ſufficiunt duo termini ex ſeriebus praememoratis ſumendi, quin imo quatuor requiruntur ita vt ponendum ſit $c^{-2nt} = 1 - 2nt + \frac{4nntt}{1.2} - \frac{8n^3t^3}{1.2.3}$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns + \frac{4nnss}{1.2} + \frac{8n^3s^3}{1.2.3}$, poſt quorum valorum ſubſtitionem oritur iam $2nt - 4nntt + 4n^3t^3 - \frac{8}{3}n^4t^4 + 1 - 2nt + 2nntt - \frac{4}{3}n^3t^3 = -2ns - 4nnss - 4n^3s^3 - \frac{8}{3}n^4s^4 + 1 + 2ns + 2nnss + \frac{4}{3}n^3s^3$, quae recte diſpoſitis terminis reiectisque $-\frac{8}{3}n^4t^4$ et $\frac{8}{3}n^4s^4$ atque facta diuiſione per $-4nn$ transit in hanc $\frac{1}{2}tt - \frac{2}{3}nt^3 = \frac{1}{2}ss + \frac{2}{3}ns^3$, vt antea. Diuiſa autem autem iſta aequatio per $s + t$ reduci poteſt ad hanc formam $t - s = \frac{4}{3}n(tt - st + ss)$, vel quoniam arcus s et t nota-

bili-

tabiliter non differunt cenſendum eſt $t-s=\frac{4}{3}ntt$, quod indicat exceſſum arcus deſcenſus t ſuper arcum aſcenſus s proportionalem ſemper eſſe quadrato arcus deſcenſus vel per naturam cycloidis ſimpliciter proportionalem deſcenſui verticali, vt habet propoſitio. Ceterum cum valor ipſius n ſit loco ſupra citato ſpecifice determinatus ex magnitudine gobi oſcillantis eiusque grauitate ſpecifica ratione fluidi reſiſtentis, facillimum nunc eſt diminutionem motus arcuumque deſcriptorum ad calculum omnibus circumſtantiis definitum reuocare, qua de re mox quaedam ſuperaddam. Q.E.D.

Corollarium.

§. 7. Si fluidum tenuiſſimum in quo corpus oſcillatur modo grauius, modo leuius ſit manentibus reliquis, erit differentia inter deſcenſum aſcenſumque in ratione grauitatis ſpecificae fluidi ad corpus; poſitis autem omnibus variabilibus erit eadem arcuum differentia in ratione compoſita ex directa deſcenſus verticalis et grauitatis ſpecificae fluidi, atque reciproca ratione, globi eiusdemque grauitatis ſpecificae. Si autem fluidum non ſit valde tenue, non amplius valet hoc theorem, et ne proxime quidem, quamuis *Newtonus* ſecus ſentire videatur p. 306. edit. *Princ. Math.*

Scholion.

§. 8. Quia conſtat aerem liberum, (qui quidem ſine notabili errore pro medio ſubtiliſſimo ha-

cenſeri poteſt, ſi corpus nec minimum ſit nec admodum leue, eſſe modo denſiorem modo rariorem, poterit ratio grauitatum ſpecificarum haberi ex numero oſcillationum dati penduli, poſt quem oſcillationes dato arcu diminutae fuerint. Et hinc menſura caloris fixa haberi poteſt, vt alia occaſione monſtrabo.

Problema.

§. 9. Si corpus in medio ſubtiliſſimo oſcilletur arcus deſcribens cycloidicos, inuenire ex primo arcu deſcenſus arcum aſcenſus, quem corpus poſt magnum oſcillationum numerum datum deſcribet, aut viciſſim ex vtroque arcu dato inuenire numerum oſcillationum.

Solutio.

Sit primus arcus deſcenſus $= t$, erit per §. 6. arcus ſubſequentis aſcenſus $= t - \frac{4}{3}ntt$. ſimiliter reperitur arcus ſecundi aſcenſus $= t - \frac{8}{3}ntt + \frac{32}{9}nnt^3 - \frac{64}{27}n^3t^4$; et poſito vltimo numero oſcillationum l, erit arcus vltimo aſcenſu deſcriptus $= t - l(\frac{4}{3}n)tt + (ll - l)(\frac{4}{3}n)^2t^3 - (l^3 - \frac{5}{2}ll + \frac{3}{2}l)(\frac{4}{3}n)^3t^4 +$ etc., cui ſeriei ſine notabili errore ſubſtitui poteſt haec altera geometrica $t - (\frac{4}{3}nl)tt + (\frac{4}{3}nl)^2t^3 - (\frac{4}{3}nl)^3t^4 +$ etc. tum ob paruitatem numeri n cuius dimenſiones inferiores prae maxima quaſi euaneſcunt. Eſt autem ſumma huius ſeriei geometricae $= t : (1 + \frac{4}{3}nlt)$, vnde ſi arcus aſcenſus poſt numerum oſcillationum l dicatur r, erit

I. $r = t : (1 + \frac{4}{3}nlt)$, ſiue

II. $l = (t - r) : \frac{4}{3}ntr$. Q. E. I.

Problema.

§. 10. Ex dato decremento totali $t - r$, quod numero oſcillationum l condenſt, inuenire decrementum minimum, quod ſoli primae aut ſoli vltimae oſcillationi debetur.

Solutio.

Immediate fluit ex praecedente aequatione; quia enim $l = (t - r) : \frac{4}{3}ntr$, erit $\frac{4}{3}nt = \frac{t - r}{lr}$, hincque facta multiplicatione per t obtinetur decrementum primae oſcillationis ſeu $\frac{4}{3}(ntt) = \frac{t.(t - r)}{lr}$, pariterque decrementum vltimae oſcillationis ſiue $\frac{4}{3}nrr = \frac{r(t - r)}{lt}$. Vnde pro priori caſu fit regula, vt ſumatur quarta proportionalis ad arcum vltimo aſcenſu deſcriptum, ad arcum primi deſcenſus et decrementum integrum diuiſum per numerum oſcillationum, quae quarta proportionalis dabit decrementum primae oſcillationis, ſin autem inuertantur duo priores analogiae termini prodit decrementum oſcillationis vltimae. Ceterum ſi decrementum integrum ſimpliciter diuidatur per numerum oſcillationum, quod oritur vocari poteſt decrementum medium, et ſi in diuerſis caſibus ſint decrementa integra proportionalia initialibus arcubus, vti ſunt in experimentis Neutonianis infra conſiderandis, patet decre-

men-

menta media rationem ſequi decrementorum initialium. Q. E. I.

Problema.

§. 11. Eadem determinare pro arcubus circularibus, quae hucusque de arcubus cycloidicis eruta fuerunt.

Solutio.

Conſideretur curua QDG vt arcus circularis, cuius radius $=a$, reliquis denominationibus quae paragrapho tertio factae fuerunt retentis; erit aequatio inter arcum deſcenſus t et arcum aſcenſus s haec $c^{2ns}\times dC=c^{-2nt}\times bA$ vel (poſitis abſciſſis DO et DM, quae arcubus s et t reſpondent, S et T) $c^{2ns}dS=c^{-2nt}dT$, quae aequatio indeterminatarum permixtione non affecta per quadraturas et rectificationes conſtrui aut etiam calculo analytico per approximationes reſolui poteſt, ita vt arcus incognitus s ex dato t definiri queat: calculum autem nimis prolixum non apponam, indicaſſe contentus compendium, quo tractari debet, ſi medium ſit tenuiſſimum, quod corpori vibrato non admodum leui nec paruo reſiſtit, prouti eſt aër ratione globi verbi gratia plumbei in aëre oſcillantis. Fig. 4.

Notetur rurſus n fieri minimum cum medium eſt tenuiſſimum, poſſeque cenſeri $c^{-2nt}=1-2nt$ et $c^{2ns}=1+2ns$; ita vero pro noſtro hoc caſu talis inſeruiet aequatio $dS+2nsdS=dT-$

$2ntdT$ vel $dS + 2nsdS + 2nSds - 2nSds = dT - 2ntdT - 2nTdt + 2nTdt$, ſiue $S + 2nsS - \int 2nSds = T - 2ntT + \int 2nSdt$. Eſt vero $ds = \frac{adS}{\sqrt{(2aS-SS)}}$ et $dt = \frac{adT}{\sqrt{(2aT-TT)}}$; quibus valoribus ſubſtitutis oritur haec altera aequatio: $S + 2nsS - 2na\int\frac{SdS}{\sqrt{(2aS-SS)}} = T - 2ntT + 2na\int\frac{TdT}{\sqrt{(2aT-TT)}}$. Eſt porro $\int\frac{SdS}{\sqrt{(2aS-SS)}} = -\sqrt{(2aS-SS)} + \int\frac{adS}{\sqrt{(2aS-SS)}} = -\sqrt{(2aS-SS)} + s$, pariterque $\int\frac{TdT}{\sqrt{(2aT-TT)}} = -\sqrt{(2aT-TT)} + t$; quibus valoribus denuo ſubſtitutis prodit $S + 2nsS + 2na\sqrt{(2aS-SS)} - 2nas = T - 2ntT - 2na\sqrt{(2aT-TT)} + 2nat$, ope cuius aequationis non difficulter admodum arcus aſcenſus s ex arcu deſcenſus t definitur. Patitur autem vltima iſta aequatio vlteriorem reductionem, quae eo innititur, quod ex natura rei differentia inter t et s vt et inter T et S ſit minima.

Ratio iſtarum differentiarum, quae huc potiſſimum facit, patebit ex figura, vbi AD eſt arcus deſcenſus et DC arcus aſcenſus, et ex puncto D ducta eſt verticalis DA atque ex punctis A et C horizontales AM et CO, ac denique producta AM vsque in L, ſimulque CP, parallela ipſi DH. Eſt ſcilicet differentia arcuum CL, et differentia inter T et S eſt OM vel CP; et quia tam CL quam CP minimae ſunt, erit per naturam circuli CL $(t-s)$: CP $(T-S)$ = radius (a) : ML $(\sqrt{(2aT-TT)})$. Poſita igitur $t - s = q$, erit $T - S = \frac{q\sqrt{(2aT-TT)}}{a}$, vel $s = t - q$ et $S = T - q$

$\sqrt{2aT}$

$\frac{\sqrt{(2aT-TT)}}{a}$. Subſtituantur hi valores in aequatione vltimo loco expoſita, vt habeatur $T - q\frac{\sqrt{(2aT-TT)}}{a} + 2ntT - \frac{2ntq\sqrt{(2aT-TT)}}{a} - 2ntTq + 2nqq\sqrt{(\frac{2aT-TT}{a})} + 2na\sqrt{(2aT-2q\sqrt{(2aT-TT)}-TT+\frac{2Tq\sqrt{2aT-TT}}{a}} - \frac{2aTqq+TTqq}{aa}) - 2nat + 2naq = T - 2ntT - 2na\sqrt{(2aT-TT)} + 2nat$. In hac aequatione reiiciendi ſunt termini affecti quantitate qq, vel nq reliquis incomparabiliter minore. Dein cenſendum eſt $\sqrt{(2aT-2q\sqrt{2aT-TT})-TT+\frac{2Tq\sqrt{2aT-TT}}{a})} = \sqrt{(2aT-TT)} - q + \frac{Tq}{a}$: quibus omnibus obſeruatis oritur tandem aequatio finalis, quae immediate decrementum q deſideratum exhibet, nempe $q = 4naa - \frac{4na(a-T)}{\sqrt{(2aT-TT)}}$, vel ſi abſciſſae ex centro ſumantur dicaturque diſtantia puncti M a centro $=\theta$, id eſt, ſi ponatur $a-T=\theta$, erit $q = 4naa - \frac{4na\theta}{\sqrt{(aa-\theta\theta)}}$. Atque ſic denique ad aequationem ſimpliciſſimam reductum fuit problema de inueniendis decrementis arcuum circularium in medio reſiſtente tenuiſſimo, quod problema prima fronte calculum tantum non inſuperabilem requirere videtur. Ceterum ſi arcus aſcenſus deſideretur non poſt vnam ſed plures oſcillationes, vt ratione arcuum cycloidicorum §. 9. indicatum fuit, id alio fere compendio fieri non poteſt, niſi vt ſingula decrementa ſucceſſiue definiantur. Q. E. I.

Corollarium.

Si arcus deſcenſus t ſit valde paruus, ita vt pro cycloidico haberi poſſit, fit rurſus vt §. 6.

q vel $t-s=\frac{4}{3}ntt$. Id vero vt appareat, accipiemus aequationem penultimam praecedentis paragraphi, nempe $q=4naa-\frac{4nat(a-T)}{\sqrt{(2aT-TT)}}$. Quia autem T vt infinite parua quantitas conſideratur cenſendum eſt $\frac{1}{\sqrt{(2aT-TT)}}=\frac{1}{\sqrt{2aT}}+\frac{T}{4a\sqrt{2aT}}$, atque proin $q=4naa-\frac{4naat}{\sqrt{2aT}}-\frac{4naatT}{4a\sqrt{2aT}}+\frac{4natT}{\sqrt{2aT}}+\frac{4natTT}{4a\sqrt{2aT}}$, vel reiecto vltimo termino (quia $t=\infty T$) $q=4naa-\frac{4naat+3natT}{\sqrt{2aT}}$; et cum praeterea ſit arcus t quaſi infinite paruus, ſit $t=\sqrt{2aT}+\frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{2a}}$ (hincque $q=4naa+\frac{36naaT-48na^3+3naTT-4naaT}{12a}=$) reiecto termino penultimo, qui infinite paruus cenſendus) $\frac{8}{3}naT=$ (per naturam circularis arcus eiusque infinite parui) $\frac{4}{3}att$, quod demonſtrandum nobis propoſuimus.

§. 13. Poſtquam ſic determinaui oſcillationes corporum in mediis ad noſtram hypotheſin reſiſtentibus tum pro arcubus cycloidicis tum pro circularibus, communicabo hic theoremata quaedam de corporibus perfecte elaſticis verticaliter in planum horizontale pariter perfecte elaſticum decidentibus reſilientibusque, ſed ſine demonſtrationibus, quae ex praecedentibus quiuis facile ſibi finget.

Theorema.

§. 14. Decidat corpus ex altitudine infinita ſuaque vi elaſtica reſiliat redeatque ad ſecundam illiſionem et ſic porro; ſit autem numerus illiſionum $=l$, dico altitudinem aſcenſus fore poſt vltimam

timam illiſionem $=\frac{1}{2n}\log.\frac{l+1}{l}$, adeoque nunquam ſaltus plane euaneſcere, quantumuis magnus ſit eorundem numerus. Patet hinc aſcenſum vltimum pro eodem ſaltuum numero rationem ſequi diametrorum, quas globi habent, eorundemque grauitatum ſpecificarum ratione mediorum reſiſtentium.

Theorema Generalius.

§. 15. Sit iam altitudo primi deſcenſus non amplius infinita ſed qualiscunque, nempe $=t$, altitudo aſcenſus poſt datum numerum vibrationum $l=s$, retentis denominationibus reliquis ſupra adhibitis, dico fore $s=\frac{1}{2n}\log.\ [(l+1+c^{2nt}-l):(lc^{2nt}-l+1)]$

Theorema.

§. 16. Poſitis iisdem, ſi quaeratur numerus lapſuum l, quibus corpus vltra datam altitudinem s reſiliat, erit $l=(c^{2nt}-c^{2ns}):(1-c^{2nt}-c^{2ns}+c^{2n(t+s)})$. Si $t=\infty$, fit $l=1:(c^{2ns}-1)$.

Exemplum.

Sit $t=\infty$; grauitas ſpecifica corporis ad aërem in quo cadit vt 1000 ad 1; Diameter globi aequalis decimae parti vnius pedis Anglici, denotet autem s altitudinem vnius pedis Angici, fit proxime $n=\frac{3}{800}$, $c^{2ns}=1\frac{3}{400}$, et $l=1:(c^{2ns}-1)=133$, quod indicat corpus tale vtut perfecte elaſticum et ex altitudine infinita delapſum atque etiam millies grauius quam aër, qui ei reſiſtit,

non

non vltra ſeptem cum triginta tribus efficere ſaltus altitudinem vnius pedis Anglici transgredientes, reliquos autem omnes (quorum quidem numerus infinitus eſt) infra hanc altitudinem ſubſiſtere.

Concluſio.

§. 17. Si conferamus hactenus dicta cum iis quae *Newtonus* habet in ſuis *Princ. Math. Phil. Nat. Lib. 2. Sect. 6.* vbique conſenſum aliquem percipiemus quamuis methodi noſtrae valde ſint diuerſae. Sunt autem *Newtoni* propoſitiones plurimae tantum proxime verae, at noſtrae ſaluis poſitionibus omnibus rigore mathematico ſunt praeditae. Quae *Newtonus* habet de velocitatibus abſolutis, indeque deducendis reſiſtentiis et oſcillationum temporibus, idque pro diuerſis reſiſtentiarum poſitionibus, equidem ex iis quae alibi dedimus haud difficulter deducuntur; ea autem huc non affero, quia animus tantum fuit exemplis illuſtrare vſum quem habet theorema noſtrum fundamentale quod ſuperiore anno cum Societate communicaui, et quod paragrapho ſecundo rurſus expoſui. Denique quod attinet ad valorem litterae *n* eius valorem numeris abſolutis dedimus in Tom. IV. p. [illegible] §. 9. ſicut et in Tomis II. et III. Innititur autem valor ipſius *n* hypotheſi a *Mariotta* ſtabilitae, quod fluidum directe in planum impingens data velocitate impetum faciat aequalem ponderi cylindri eiusdem fluidi

at-

atque craſſitiei, cuius cylindri altitudo talis ſit, vt graue libere ex illa decidendo velocitatem acquirat, quae ſit fluidi velocitati aequalis. Iſtam hypotheſin plura experimenta de fluidis non admodum lente motis facta confirmant. Quod ſi vero impetus iſte fluidi ſit augendus, in eadem quoque ratione erit augendus valor litterae m. Videamus autem nunc, quid experimenta hac de re inquiant. Horum autem extant plurima apud *Newtonum in Princ. Math. Phil. Nat. Lib. ſec. Sect. 6. p. 307. edit. nouiſſimae*, vbi ſcholium generale exhibet: omnia iſta experimenta videntur ſummo cum attentione facta, et apprime ad rem noſtram facient. Excerpam hic primam experimentorum claſſem, relinquens aliis explicationem theorematum noſtrorum ad experimenta, quae in aliis fluidis quam aëre facta ſunt.

Experimenta Newtoni ad calculum reuocata.

Globum ligneum inquit *Newtonus* pondere vnciarum Romanarum $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum Londinenſium $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab vnco ſatis firmo ſuſpendi, ita vt inter vncum et centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notaui pedibus decem et vncia vna a centro ſuſpenſionis diſtans, et e regione puncti illius collocaui regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitu-

“dines arcuum a pendulo deſcriptas; deinde numeraui oſcillationes, quibus globus octauam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum et inde demittebatur, ita vt toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima ex deſcenſu et aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor, idem oſcillationibus 164 amiſit octauam motus ſui partem, ſic vt vltimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti vnius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor amiſit octauam motus partem oſcillationibus 121, ita vt aſcenſu vltimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor, amiſit octauam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ reſpectiue etc.

Primo loco patet quod, vbi arcus deſcripti paullo ſunt maiores, nec adeoque motus fiunt lentiſſimi, id annotante etiam *Newtono*, ſint decrementa vni oſcillationi debita proxime proportionalia quadratis arcuum deſcriptorum, quod conuenit cum theoremate § 6. Ita cum in duobus penultimis experimentis primi arcus deſcenſus erant 16 et 32 digitorum requirebantur $35\frac{1}{3}$ et $18\frac{1}{2}$ oſcillationes, vt decrementa eſſent 2 et 4 digitorum. Igitur in caſu priori ſi decrementa ae-

qualiter

qualiter diſtribuantur, vni oſcillationi conuenit decrementum medium $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ et in caſu poſteriori decrementum medium $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$; eſt igitur prius decrementum ad poſterius proxime vt 1 ad 4, id eſt vt quadrata arcuum deſcenſibus initialibus deſcriptorum. Sunt autem decrementa media, vel decrementa primae oſcillationi vtrobique debita, quod demonſtraui §. 10. quia decrementa integra facta fuerunt arcubus initialibus proportionalia. Eſt interim decrementum $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ ad alterum $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$ in ratione paulo maiori quam 1 ad 4, quod indicat reſiſtentiam aliam, quae ſolet ſtatui momentis temporum proportionalis atque tenacitati medii tribuitur, ſenſibiliorem fuiſſe in priori experimento quam in poſteriori, vbi motus iam erat velocior. Iam vero inſuper videamus quaenam fuerint decrementa primae ab vtraque parte oſcillationi debita. Ad hoc autem per regulam §. 10. ſimpliciter requiritur vt decrementa media inuenta $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ et $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$ augeantur in ratione vt 8 ad 7. ſiue 1 ad 1. Ergo cum primus deſcenſus erat 16. digitorum, fuit decrementum primae oſcillationis $= \frac{8}{7} \times \frac{2}{35\frac{1}{2}} = 0, 0644$ partibus

 di-

digiti vel $= 0, 00536$ partibus pedis; pariter inuenitur decrementum primae oſcillationis conueniens arcui 32 digitorum $= 0, 02059$ pedis partibus. Deberent autem per §. 6. iſta decrementa eſſe reſpectiue aequalia $\frac{4}{3}ntt$, ſeu quadrati arcus in pedibus Anglicis exprimendi multiplicato per $\frac{4}{3}n$. At erant grauitates ſpecificae globi et aquae, prouti *Newtonus* indicat pag. 309. vt 55 et 97. Ergo poſito tempore inſtituti experimenti fuiſſe grauitates ſpecificas aëris et aquae vt 1 et 860, diuiſaque diametro globi in partes milleſimas pedis Anglici, erit $n = \frac{375}{[illegible]5723} = 0, 00135$. Eſt igitur in priori caſu $\frac{4}{3}ntt = 0, 00322$ et in poſteriori $= 0, 01288$. Sunt igitur decrementa iſta calculi notabiliter minora decrementis ex obſeruatione deductis, idque proxime in ratione vt 3 ad 5. Vnde concludendum foret, ſi nihil obſtaret oſcillationibus praeter reſiſtentiam illam a nobis hactenus conſideratam et ab inertia particularum fluidi reſiſtentis oriundam, non amplius valere pro aëris reſiſtentia valorem *n* quem pro reſiſtentia aquae ſtabiliuimus in ſuperioribus Tomis tum ex ratione tum ex experimentis longe plurimis, et eſſe reſiſtentiam aëris ad reſiſtentiam aquae non habita ratione ad differentias grauitatum ſpecificarum propemodum vt 5 ad 3. Cum vero alia ſint experimenta alterius generis, quae ſuadent non aliter reſiſtere aërem quam aquam, potius indicandum eſt, eſſe impedimenta alia in motibus pendulorum conſi-

de-

deranda, quorum rationem nondum habuimus, talia ſunt Imo reſiſtentia, quam filum globum ſuſpendens, offendit. IIdo Illiſio ſiue attritus fili in locum ſuſpenſionis. IIItio Aliqualis fili rigiditas et IVto quod potiſſimum hic notandum, tenacitas medii, quae aliam reſiſtentiam format momentis temporum vt creditur proxime proportionalem, quae reſiſtentia poſterior in oſcillationibus corporum ideo conſideranda praecipue eſt, quia motus oſcillationum ſunt valde lenti. Opportuna hic eſſet occaſio monſtrandi modum, quo altera haec reſiſtentia etiam ad menſuras reduci poſſit, quod in oſcillationibus minimis plane eſt neceſſarium, quodque non difficile eſſet, quandoquidem in poteſtate ſit theorema noſtrum fundamentale extendere ad vtrumque reſiſtentiarum ſimul reſiſtentium genus, quo theoremate generaliori facto omnia pari facilitate abſoluentur. Quoniam autem hae paginae iam in maius quam conſtitueram volumen excreuerunt, neque nunc per iſta omnia ire vacat, haec et ſimilia in proximam occaſionem reſeruabo.

Dan. Bernoulli
ADDITAMENTVM
AD
THEOREMATA
De Motu Corporum curuilineo in mediis reſiſtentibus, in quo reſiſtentiae conſiderantur quae partim quadratis velocitatum partim momentis temporum proportionales ſunt.

MVltus hucusque fui in commentandis motibus, qui fiunt in mediis reſiſtentibus, iisque ad menſuras quantum fieri poteſt accuratas reducendis. In Tomo ſecundo atque tertio motus conſideraui rectilineos. In quarto autem et praeſente curuilineos potiſſimum. Quod ad hos pertinet, theorema dedi in Tomo quarto alicuius vt puto vſus in abbreuiandis calculis aliàs ſaepe vix ſuperabilibus: huiusque theorematis fertilitatem oſtendi in diſſertatione breui, quam videre eſt in hoc tomo. Haec autem ſolam conſiderant hypotheſin reſiſtentiarum quadratis velocitatum proportionalium. Cum vero in motibus lentiſſimis alia quaedam reſiſtentiae ſpecies ſe manifeſtet praeter modo dictam, quae cum ratione aliqua ſtatuitur momentis temporum proportionalis (qua de re legi poſſunt quae in Tomo tertio exhibentur) cumque in fine diſſertationis huic Tomo inſertae me hanc quoque reſiſtentiam explicaturum promiſerim, facturus promiſſa, oſtendere

dere hic conſtitui modum, quo theoremata illa circa motum curuilineum exhibita extendi poſſint ad hypotheſin reſiſtentiarum partim quadratis velocitatum partim momentis temporum proportionalium, vt ſic experimentis accuratiſſime inſtituendis intelligere poſſimus, an et quaenam motuum lentiſſimorum in mediis reſiſtentibus menſurae ſperari poſſint. Breuis ero quia methodus vix differt ab illa quam in duobus praecedentibus Tomis adhibui, et ſi cui haecce non ſatis explicata videantur, hunc rogarim vt ſuperiora cum iſtis conferre velit. Vt appareat analogia, transſcribam ex tomo quarto ipſa theorematis illius verba paucis mutatis, quae ſunt mutanda.

Theorema.

§. 1. Sit curua qualiscunque $aACc$ ſuper qua corpus moueri ponatur, ita vt vbique reſiſtentiam offendat quadrato velocitatis ſuae, tum etiam momento temporis proportionalem. Incipiat primo deſcendere grauitate ſua in A perueniatque priusquam retrogrediatur in C; dein deſcendere incipiat idem corpus in a aſcenſuque ſuo maximo perueniat in c: ducantur verticales Ab et Cd atque horizontales ab et cd, ſintque elementa Aa et Cc infinite parua, dico fore ſemper ſpatium percurſum AC proportionale logarithmo rationis quam habet $bA.g + aA.m$ ad $dC.g + Cc.m$, vbi per g et m intelliguntur conſtantes quae in demonſtratione definientur. Tabulae IV. Fig. 3.

De-

Demonſtratio.

Deſcendat primo corpus ex A perueneritque in punctum F, moxque poſt tempuſculum infinite paruum dt in E: ducantur horizontalis FG et verticalis GE: ponatur velocitas in puncto F $= v$ in E $= v + dv$. Exprimatur actio grauitatis corpus fluido ſubmerſum animans per g, numerusque ille qui multiplicatus per quadratum velocitatis dat reſiſtentiam fluidi priorem indicetur per n. Denique notetur, alteram reſiſtentiam, quae nempe ponitur vbique momentis temporum proportionalis, talem eſſe vi ipſius poſitionis, vt in omni corporis ſitu aequaliter reſiſtat nulla facta attentione ad corporis velocitatem: hanc igitur reſiſtentiam vocabimus m, quae multiplicata per tempuſculum dt dat incrementum velocitatis dv; hinc igitur habetur aequatio

$$\text{I.}\ \left(\frac{g.EG}{FE} - nvv - m\right) dt = dv$$

quae poſito $\frac{FE}{v}$ pro dt in hanc aequationem

$$\text{II.}\ gEG - nvv.FE - mFE = vdv.$$

Iam vero fingamus corpus idem deſcendere incepiſſe ex puncto a rurſusque perueniſſe in punctum F, moxque in E, dicatur retentis caeteris poſitionibus velocitas eius in F $= p$ et in E $= p + dp$; ita obtinebitur loco ſecundae aequationis haec altera.

$$\text{III.}\ gEG - npp.FE - m.FE = pdp.$$

Subtrahantur termini aequationis tertiae a terminis aequationis ſecundae; ſic erit facta ab vtraque parte diuiſione per $pp - vv$. IV.

IV. $n.FE = \frac{-pdp+vdv}{pp-vv}$

cui poſtremae aequationi id commode accidit, quod integrari poſſit; vt vero debita conſtans addi poſſit, conſideranda eſt velocitas corporis ex a delapſi in puncto A; ſit ergo velocitas illa $= a$. ita vt exiſtente puncto F in A ſit $p = a$ et $v = o$, dicaturque numerus, cuius logarithmus eſt vnitas, $= c$, atque ita aequatio quarta ſi integretur dat

V. $pp = vv + c^{-2n.AF}aa$.

Verum cum corpus ex A delapſum peruenit in C, ſit $v = o$ et AF = AC, tunc igitur habetur $pp = c^{-2n.AC}aa$ vel

VI. $2n.AC = \log.\frac{aa}{pp}$.

vbi iam per p intelligitur velocitas corporis ex a delapſi in puncto C. Supereſt vt inquiramus in rationem ipſius $\frac{aa}{pp}$, vt habeatur deinceps valor quaeſitus ipſius AC. Denotat autem a velocitatem corporis ex puncto a delapſi vsque in A, et p velocitatem qua idem corpus ex C aſcendere poſſit vsque in c. Quoniam igitur in vtroque caſu velocitates ſunt infinite paruae, erunt reſiſtentiae primae ſpeciei nullae. Igitur ſi conſiderentur aA et Cc ſicuti plana inclinata, ſuper quorum priori corpus grauitate ſollicitatum a ſtatu quietis deſcendat reſiſtentiam vniformem vbique offendens, dum ſuper altero aſcendit paribus conditionibus ad ſtatum quietis vsque, inuenietur ex mechanicis eſſe (retentis ſignificationibus litterarum g et m) $\frac{aa}{pp} = \frac{bA.g-aA.m}{dC.g+Cc.m}$. Hinc er-

go aequatio ſexta exhibet hanc aequationem finalem et enunciato theorematis conformem, nempe

$$\text{VII. } AC = \frac{1}{2n} \log. \frac{bA.g - aA.m}{dC.g + Cc.m}. \text{ Q. E. D.}$$

Corollarium 1.

§. 3. Si $m = o$, id eſt, ſi nulla habeatur ratio reſiſtentiae, quae momento temporis proportionalis ponitur, oritur theorema, quod in tomo quarto et praecedente diſſertatione breui pertractauimus.

Corollarium 2.

§. 4. Si vero $n = o$, id eſt, ſi non reſpiciatur reſiſtentia rationem duplicatam velocitatum affectans, fit $\frac{bA.g - aA.m}{dC.g + Cc.m} = 1$, ſeu $(bA - dC)g = (aA + Cc)m$; facit autem ſumma omnium elementorum $(bA - dC)$ altitudinem verticalem per quam corpus deſcendit, dum ex ſtatu quietis ad quietem peruenit et ſumma omnium $(aA + Cc)$ efficit arcum curuae, quem corpus interea deſcribit, vnde ſi prior ſumma dicatur x, altera z, fit $xg = zm$, quae aequatio etiam oritur ſi directe quaeratur, ita vt ſic caſus particulares recte in aequatione catholica theorematis contineantur.

Scholion.

§. 5. Poterunt iam, quamuis calculo prolixiori, ope aequationis ſeptimae omnia problemata ſolui atque theoremata inueniri ſimilia illis

 quae

quae dedimus in ſuperioribus; nolo autem his nimium immorari; vnicum explicabo quod inſtituto noſtro nunc eſt conuenientiſſimum. Nempe quomodo decrementa oſcillationum corporis arcus cycloidicos deſcribentis ad calculum reuocari debeant, vt haec decrementa tum calculo tum experimentis eruta atque inter ſe comparata oſtendant, quousque fidendum ſit hypotheſibus in motibus lentiſſimis.

Equidem praeferenda eſſet poſitio arcuum circularium poſitioni arcuum cycloidicorum, quia pendula ſimplicia de quibus experimenta ſumi ſolent, reuera arcus circulares deſcribunt. At vero quum computus fiat admodum prolixus in caſu arcuum circularium, neque hi a cycloidicis notabiliter differant, ſi parui ſumantur, prouti ſumendi ſunt, vt motus fiat lentiſſimus, operae pretium non eſt laborem calculi nimii ſubire; neque eſt cur vel minimus ſcrupulus hac in parte ſuperſit. Si quis tamen cupiat arcus circulares etiam calculo ſubiicere, hanc viam ſtrauimus in diſſertatione huius Tomi §. 11. vbi methodo ſingulari rem totam abſoluimus. Nunc agemus tantum de arcubus cycloidicis, tum pro mediis notabiliter reſiſtentibus, tum etiam pro iis, quorum reſiſtentia minima eſt neque aliter, niſi poſt plurimas oſcillationes percipi poteſt.

Problema.

§. 6. Dato arcu deſcenſus corporis in cycloide oſcillantis, quod reſiſtentiam duplicem ſupra explicatam vbique offendit, inuenire arcum aſcenſus.

Solutio.

Tabula IV. Fig. 4.

Sit cyclois propoſita QDG; diameter circuli generatoris DH, cuius ſitus eſt verticalis $=a$; fingatur corpus ex A et a ſucceſſiue delapſum aſcenſus facere vsque in C et c, ducantur horizontales AM, aI, CO et cH minimaeque verticales Ab et Cd: ſit DA$=t$, DC$=s$, A$a=dt$, C$c=ds$, erit per naturam cycloidis DM$=\frac{tt}{4a}$, DO$=\frac{ss}{4a}$, IM vel bA$=\frac{tdt}{2a}$, NO vel dC$=\frac{sds}{2a}$, quibus omnibus valoribus ſubſtitutis in aequatione vltima §. 2. oritur.

$$\text{I.}\quad t+s=\frac{1}{2n}\log.\frac{gtdt-2madt}{gsds+2mads}$$

quae aequatio poſito rurſus c pro numero cuius logarithmus eſt vnitas transformari poteſt in hanc

$$\text{II.}\quad g.c^{2ns}sds+2ma.c^{2ns}ds=g.c^{-2nt}tdt-2ma.c^{-2nt}dt,$$

cuius integratione facta oritur talis aequatio exponentialis

$$\text{III.}\quad 2ng.c^{2ns}s+(4mna-g).c^{2ns}=-2ng.c^{-2nt}t+(4mna-g).c^{-2nt}$$

Hisce aequationibus aequiualet etiam haec ſimpliciter differentialis a quantitatibus exponentialibus libera, nempe

$$\text{IV.}\quad \frac{gs+2ma}{2ngs+4mna-g}ds=\frac{gt-2ma}{-2ngt+4mna-g}dt,$$

Ex

Ex omnibus autem iſtis aequationibus facile eſt ad valorem arcus s ex dato t quantumlibet accedere. Q. E. I.

Scholion.

§. 7. Non prolixiorem calculum nec difficiliorem requirit poſitio vtriusque reſiſtentiae quam ſolius eius quae ſequitur rationem quadratorum velocitatum. Si autem in praeſentibus aequationibus ponas $t = z + \frac{2me}{g}$, et $s = q - \frac{2me}{g}$, obtinebis aequationes prorſus ſimiles illis quae in priore diſſertatione §. 3. exhibitae fuerunt. Interim patet non amplius hic valere theorema §. 4. eiusdem diſſertationis. Quod reliquum eſt pro inſtituto noſtro reſiſtentiam aëris eiusque theoriam potiſſimum ſpectante, id in ſequenti propoſitione complectemur, vbi ponemus vtramque reſiſtentiam valde paruam, et ſingula decrementa minima eſſe ratione arcuum deſcriptorum; quae hypotheſes faciunt vt quantitates n, m et t, s ſint infinite paruae cenſendae.

Problema.

§. 8. Inuenire minima oſcillationum decrementa corporis in cycloide oſcillantis in medio admodum parum ſecundum vtramque hypotheſin reſiſtente.

Solutio.

Si n ſecundum naturam problematis ſit valde paruus numerus, erit cenſendum $c^{2ns} = 1 + 2ns$

 et

et $c^{-2nt} = 1 - 2nt$, quibus valoribus commutatis in aequatione ſecunda paragraphi 6. fit

$$2mads + (g + 4mna)sds + 2ngssds = -2madt + (g + 4mna)tdt - 2ngttdt,$$

Haec autem aequatio poſt ſui integrationem mutatur in hanc

$$2mas + \tfrac{1}{2}(g + 4mna)ss + \tfrac{2}{3}ngs^3 = -2mat + \tfrac{1}{2}(g + 4mna)tt - \tfrac{2}{3}ngt^3,$$

quae ad nihilum reducta et diuiſa per $s + t$ abit in hanc

$$2ma + \tfrac{1}{2}(g + 4mna)(s - t) + \tfrac{2}{3}ng(ss - st + tt) = 0.$$

Et ſi in hac vltima aequatione ponatur ſimpliciter tt loco $ss - st + tt$ (cenſentur enim arcus t et s fere aequales) reperietur decrementum oſcillationis ſeu

$$t - s = (2ma + \tfrac{2}{3}ngtt) : \tfrac{1}{2}(g + 4mna).$$

Denique apparet poſſe ſimpliciter poni g pro $g + 4mna$; hoc igitur facto oritur

$$t - s = \tfrac{4ma}{g} + \tfrac{4}{3}ntt. \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium.

§. 9. Quo longius eſt pendulum eo magis ceteris paribus decreſcunt oſcillationes, dum in hypotheſi vnicae reſiſtentiae quae ſequitur rationem quadratorum velocitatum penduli nihil confert ad decrementa oſcillationum, prouti demonſtraui in priore diſſertatione §. 4.

Problema.

§. 10. Data ſumma decrementorum poſt magnum oſcillationum in medio tenuiſſimo numerum

merum, inuenire decrementum ſoli primae oſcillationi debitum.

Solutio.

Mutatis mutandis eadem eſt, quae in diſſertatione antecedente §. 9. et 10. quapropter ratiocinium non repetam, ſed dicam tantum, quid methodo illa recte adhibita oriatur. Sit primus arcus deſcenſus $= t$, arcus vltimo aſcenſu deſcriptus $= r$, numerus oſcillationum $= l$; et cum primum decrementum ſit per praecedentem §. $= \frac{4ma}{g} + \frac{4}{3}ntt$, inueniendus eſt huius decrementi valor; dico autem fore poſito recte vbique calculo

$$\text{I. } r = (t - \tfrac{4lma}{g}) : (1 + \tfrac{4}{3}nlt),$$

quae aequatio inſeruit, vt poſſit vltimus arcus aſcenſus inueniri ex primo arcu deſcenſus t et numero oſcillationum l. Dein inuenietur numerus oſcillationum l ex vtroque arcu t et r, tali vtendo aequatione.

$$\text{II. } l = (t - r) : (\tfrac{4ma}{g} + \tfrac{4}{3}ntr).$$

Denique, quod saepiſſime requiritur, eſt vt ex toto decremento $t - r$ inueniatur decrementum primae oſcillationis, nempe $\frac{4ma}{g} + \frac{4}{3}ntt$. Hic vero locum non obtinet compendium illud, quo vſi ſumus in ſuperiori diſſertatione loco modo citato multiplicando aequationem per t. Hinc nec ita concinna fiet regula; ſic autem pertractabimus aequationem ſecundam; inde eſt nempe $\frac{4ma}{g} = \frac{t-r}{l} - \frac{4}{3}ntr$;

ntr; addatur ab vtraque parte $\frac{4}{3}ntt$, vt habeatur $\frac{4ma}{g}+\frac{4}{3}ntt=\frac{t-r}{l}-\frac{4}{3}ntr+\frac{4}{3}ntt$, quae aequatio mutata paulo facie haec tandem eſt.

$$\text{III. } \frac{4ma}{g}+\frac{4}{3}ntt=\frac{t-r}{l}+\frac{4}{3}nt\times(t-r),$$

quae monſtrat decremento toti diuiſo per numerum oſcillationum addendum eſſe numerum minimum $\frac{4}{3}nt\times(t-r)$, exprimendo ſcilicet arcus t et r in pedibus Anglicis. Q. E. I.

Corollarium.

§. 11. Non differunt aequationes duae priores nec forma nec valore ab ſuis correſpondentibus diſſertationis prioris §. 9. ſi ponatur $m=o$; tertia autem aliam tunc habet formam quam aequatio eiusdem diſſertationis §. 10. ſed valores non differunt niſi in quantitatibus quas vt minimas tractauimus.

Concluſiones Phyſicae de natura oſcillationum in aëre et fluidorum reſiſtentium.

§. 12. Licet vtique aërem conſiderare ceu medium minimae reſiſtentiae, ita vt propoſitiones praecedentes applicari poſſint ad inueſtigandam reſiſtentiam aeris, ſi modo haec reſiſtentia pura ſit, ſunt autem alia inſuper obſtacula oſcillationibus: nempe fili aliqua rigiditas eiusque impulſus contra locum ſuſpenſionis, vt et reſiſtentia quam aër contra filum exercet, quorum obſtaculorum

lorum in calculo nullam habuimus conſiderationem. Licet autem obſtaculum a rigiditate fili eiusque impulſu contra latera foraminis, per quod fili ſummitas transit, referre ad claſſem reſiſtentiae illius quam fecimus momentis temporum proportionalem, dum reſiſtentiam aëris contra filum putabimus ipſi globo ſuperuenire. Quibus ita poſitis apparet non mutari naturam aequationum praemiſſarum, ſed augeri tantum valores litterarum m et n: quia vero incertum eſt quantum augeantur, eos determinabimus per experimenta, atque ſic poſtea examinabimus, an aequationes duobus experimentis accommodatae conueniant cum reliquis experimentis de eodem pendulo ſumtis. Itaque vtemur prima aequatione §. 10. nempe $r = (t - \frac{4lma}{g}):(1 + \frac{4}{3}nlt)$, vel quia in eodem pendulo eodemque fluido non mutantur litterae a et g, ponemus

$$r = (t - l\alpha):(1 + \mathfrak{E}lt)$$

atque in duobus caſibus particularibus inquiremus in valores litterarum α et $\mathfrak{E}$. Hos autem caſus ſumemus ex *Newt. Nat. Princ. Math.* p. 310. edit. 3.

I. Certus globus ex certa altitudine ſuſpenſus deſcribens primo deſcenſu ſextam partem vnius pedis poſt 374 oſcillationes aſcenſu fecit octauam partem vnius pedis.

Hic $t = \frac{1}{6}$, $r = \frac{1}{8}$, $l = 374$, vnde $\frac{1}{8} = (\frac{1}{6} - 374\alpha):(1 + \frac{374\mathfrak{E}}{6})$

II. Idem globus ſimiliter ſuſpenſus deſcribens primo deſcenſu tertiam partem vnius pedis poſt 272 oſcillationes aſcenſum fecit aequalem quartae parti pedis.

Hic $t = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{4}$, $l = 272$; ergo $\frac{1}{4} = (\frac{1}{3} - 272\alpha) : (1 + \frac{272\beta}{3})$ Ex combinatis iſtis aequationibus fit $\alpha = \frac{85}{1831104}$ et $\beta = \frac{5712}{1831104}$, hinc igitur ſubſtitutis his valoribus oritur $r = (t - \frac{85 l}{1831104}) : (1 + \frac{5712 l t}{1831104})$, vel

$$r = \frac{1831104 t - 85 l}{1831104 + 5712 l t}.$$

Videamus nunc quantum vltima haec aequatio conueniat cum reliquis experimentis ibidem memoratis. Sic cum primus arcus deſcenſus erat $= \frac{2}{3}$ et numerus oſcillationum $162\frac{1}{2}$, erat vltimus arcus aſcenſus $= \frac{1}{2}$; ſed ſecundum formulam debebat eſſe $= \frac{1206924}{2449904}$, quae ſic ſatis conueniunt. Dein poſito $t = \frac{4}{3}$ et $l = 83\frac{1}{3}$, obſeruatum fuit eſſe $r = 1$; eſt autem ſecundum aequationem $r = \frac{2434389}{2465767}$, quae pariter non multum diſſentiunt. Mox cum t erat $= \frac{8}{3}$, $l = 41\frac{2}{3}$, obſeruatum fuit $r = 2$, dum formula noſtra indicat $r = \frac{4879403}{2465771}$; Denique exiſtente primo arcu deſcenſus $5\frac{1}{3}$ pedum, obſeruabatur vltimus aſcenſus quatuor pedum poſt oſcillationes $22\frac{2}{3}$: debet autem ſecundum aequationem eſſe vltimus aſcenſus $r = \frac{9763962}{2521622}$. Omnes hi caſus egregie conſentiunt cum theoria praeter vltimum, qui aliquantum magis ab illa recedit, quod non defectui alicui formulae ſed aliis circumſtantiis tribuendum eſſe nullus dubito, veluti quod arcus circularis nimius fuerit, quam vt pro cycloidico haberi poſſit, aut quod in obſeruatione non ſatis diſtincti fuerint arcus a chordis reſpondentibus, cum diuiſiones factae fuerint in regula horizontaliter poſita. Simile autem quid

con-

contigiſſe ex eo liquet, quod numeri oſcillationum ſemper magis vergere obſeruati fuerint ad rationem duplam praeter vltimam obſeruationem, cuius numerus rurſus diuergit, nam praeciſe dupla eſt ratio inter $83\frac{1}{3}$ et $41\frac{2}{3}$, dum ratio inter $41\frac{2}{3}$ et $22\frac{2}{3}$ minor eſt dupla, et ſi ex inductione de vltimo iſto numero oſcillationum quis iudicaſſet, vix illum vltra $20\frac{2}{3}$ extenſurus fuiſſet.

Similiter computum apponam experimentorum de eodem pendulo ſumtorum et pag. 307. recenſitorum eiusque conſpectum in ſequenti tabula dabo.

Primus deſcenſus in ped. Anglic.	Numerus oſcillationum.	Vltimus aſc. per obſerv.	Vltimus aſc. per theoriam.	Differentiae in fractionibus decim. ped. Angl.
$\frac{1}{6}$	164	$\frac{7}{48}$	$\frac{291244}{1987232}$	+0.0007
$\frac{1}{3}$	121	$\frac{7}{24}$	$\frac{600083}{2061488}$	−0.0005
$\frac{2}{3}$	69	$\frac{7}{12}$	$\frac{1214871}{2093856}$	−0.0029
$\frac{4}{3}$	$35\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{2438455}{2101472}$	−0.0059
$\frac{8}{3}$	$18\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{4881372}{2112896}$	−0.0223
$\frac{16}{3}$	$9\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{9765066}{2125589}$	−0.0711

Atque ſic quidem apparet non incongruenter adhiberi formulas §. 10. cum in illis litterae *m* et *n* ſeu inde pendentes *α* et *β* ope duorum experimentorum determinantur, quod fecimus in hisce calculis. Si tamen dicendum, quod res eſt, negari non poteſt hanc methodum plane non con-

uenire cum oſcillationibus perquam exiguis veluti vnius digiti aut adhuc minoribus. Tunc enim deberent decrementa ſingula eſſe inter ſe aequalia, atque proin decrementorum aggregatum proportionale numero oſcillationum, quod minime conuenit cum experimentis de globo plumbeo oſcillante a *Newtono* ſumtis et in eodem ſcholio generali p. 310. recenſitis, vbi dicitur, globum qui primo deſcenſu perfecit arculum duorum digitorum, perfeciſſe aſcenſu ducenteſimo vigeſimo octauo ſeptem quartas digiti partes, eundemque globum ſimiliter ſuſpenſum aſcenſu ducenteſimo vigeſimo ſexto arculum deſcripſiſſe ſeptem partium octauarum digiti cum primo deſcenſu deſcripſerat vnum digitum, quae duae obſeruationes non ſatis conciliari poſſunt cum ſuperioribus aequationibus noſtris, ſi ſimul reſpiciamus reliquas obſeruationes. Vnde tandem concludo, quod etiam vberius explicaui in diſſertatione Tom. 3. motibus paulo velocioribus inſeruire hypotheſin ſimplicem reſiſtentiam quadratis velocitatum proportionalem, motibus lentioribus eandem hanc reſiſtentiam coniunctam cum altera quae momentorum temporum rationem ſequatur egregie ſatisfacere, motibus autem plane lentiſſimis, quales fiunt in oſcillationibus perexiguis neutram ex aſſe ſatisfacere eorumque theoriam incertam adhuc eſſe, nec fortaſſe dari poſſe ob inconſtantiam incertitudinemque circumſtantiarum multiplicium. Si dicas fluida reſiſtentiam exercere aliquam momentis temporum

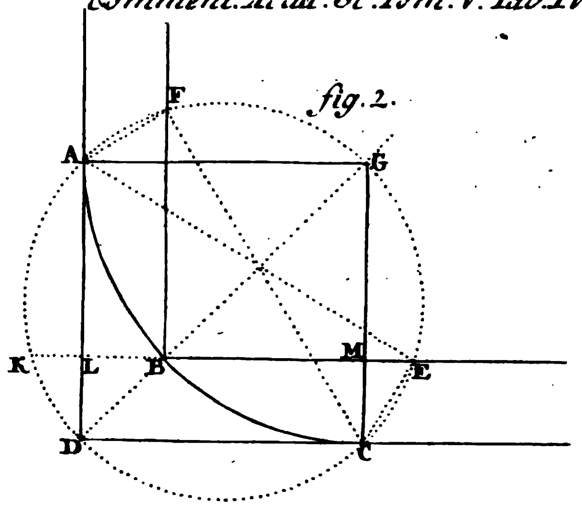
ad

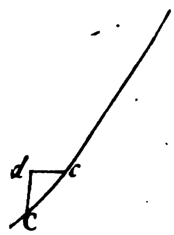
ad amuſſim proportionalem, ſequitur praeterea fila corporum pendulorum in fluidis iis ſuſtineri poſſe extra ſitum verticalem, et quidem ab eodem notabiliter remota, quod nec in aëre nec in aqua imo nec in oleis plerisque vnquam obſeruatum fuiſſe crediderim; quamuis id in fluidis valde tenacibus veluti oleis quibusdam aut melle ſi modo fluida ſint vocanda, fieri poſſe nullum ſit dubium. Dubito igitur an aëri vel aquae limpidae et purae dici poſſit vllam tenacitatem, quae ſub ſenſus cadat, ineſſe et an reſiſtentia illa quae ſe manifeſtat cum corpus lentius ſe mouet in hisce fluidis ortum trahat ab eorundem tenacitate, quo in caſu magis ſequeretur rationem momentorum temporis, vti oſtendi in citata diſſertatione Tom. 3. Vt vero redeam ad oſcillationes minimas pendulorum, quamuis vix puto comprehendi illas ſe pati certis regulis tamen monendum duxi, theoriam non protinus reiiciendam eſſe, ideo, quod non cum omni rigore experimentis de illa re ſumtis reſpondeat, quandoquidem huiusmodi experimenta ſatis accurate minime inſtitui poſſint. Vix fieri poteſt vt minor quam decima pars lineae recte et aliqua cum certitudine obſeruetur: et tali particulae in experimentis *Newtonianis* ad oſcillationes minimas globi plumbei praememoratas pertinentibus reſpondent propemodum quindecim oſcillationes, ita vt non videam quomodo affirmari poſſit minorem oſcillationum numerum requiſitum fuiſſe vt octaua motus pars amitteretur, cum primus deſcenſus fuerit vnius digiti quam cum fuerit duorum digitorum, praeſertim cum id diſſentire vi-

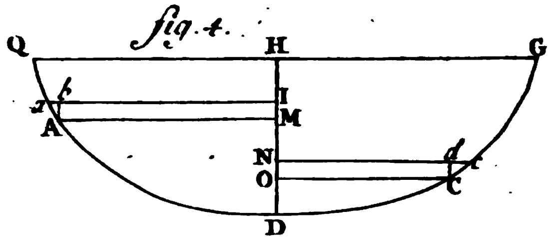
deatur cum reliquis obſeruationibus. Scio tamen fieri poſſe, imo debere in arcubus ſat paruis, ſi re- ſtentiae ſtatuantur momentis temporum perfe proportionales.

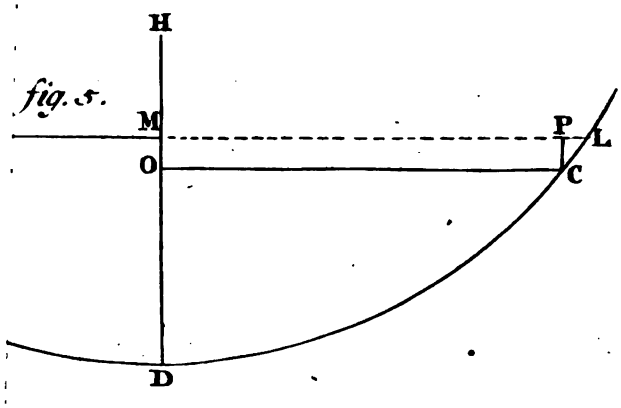
Quoniam autem ex omnibus phaenomenis con- cludi poſſe videtur corpora in fluidis paulo celer mota praeter reſiſtentiam quadratis velocitatum pro- portionalem aliam offendere, quae ſtatui poſſet mo- mentis temporum proportionalis, quaeſtio ſe n offert, qui ergo fiat, vt nullum corpus aqua vel mi- mum grauius in eadem ſuſpenſum haereat, idem cur e filo ſuſpenſum ſemper ſitum infimum aſſum denique cur in motu lentiſſimo iſta reſiſtentiarum po- ſitio plane non conueniat. Haec ſi recte intelligere- tur, ſperari poſſet illam ſcientiam quae fluida ſpect haud parum hinc promotum iri. Interim ſuſpicari li- cet in motu non admodum lento particulas fluidi a ſe inuicem quaſi diuelli, hanc autem diuulſionem in mo- tu lentiſſimo ideo non ſuperuenire; quod vna parti- cula ſuper aliam ſe mouendo ſat cito locum a corpo- re moto relictum occupet: ita duo ſpecula laeuigata ſibi ſuper impoſita ſine ingente vi diuelli non poſ- ſunt, dum facile vnum ſuper altero mouetur. Niſi ſimile quid ſuccedat ſtatuaturque particulas fluidi li- berrime ſuper ſe inuicem moueri; ſicque locum cor- poris ſolidi moti profecto occupare non video quare pendula corpora in fluidis locum infimum ſemper perfecte aſſumant.

QVO


fig. 2.
F
A
G
K
L
B
M
E
D
C


d
c
C


fig. 4.
Q
H
G
b
a
I
M
A
N
d
c
O
C
D


H
fig. 5.
M
P
L
O
C
D

QVOMODO DATA QVACVNQVE CVRVA INVENIRI OPORTEAT ALIAM, QVAE CVM DATA QVODAMMODO IVNCTA AD TAVTOCHRONISMVM PRODVCENDVM SIT IDONEA.

Auct. L. Eulero.

1.

MEditanti mihi ante quadriennium de curua tautochrona ad Horologium Domini *Sullii* accommodata, vid. Comm. A. 1727. occurrit aliud quoddam oſcillationum genus, quod duabus continetur curuis, et tale eſt, vt data earum altera, altera ſemper inueniri poſſit. Quamobrem quaeſtio de hoc tautochroniſmo indeterminata eſt, et infinitas admittit ſolutiones. Quae proprietas, quae mihi elegans eſſe, et vſum quendam fortaſſe in praxi habere poſſe viſa eſt; praetereaque ipſa ſolutio, quae problematis traiectoriarum reciprocarum ſimilis eſt ſolutionis, et propter id peculiarem hucusque non multum vſitatum ſoluendi modum requirit, me impulerunt, vt meam methodum ad huiusmodi problemata ſoluenda admodum idoneam iterum proponerem, huicque caſui accommodatam traderem. Tabula V.

§. 2. Originem autem duxit praeſens problema ex certo quodam oſcillandi genere, quod Tabula V. Fig 1.

hic

hic ante omnia exponere conuenit. Concipio trochleam ABP circa axem per centrum eius A tranſeuntem mobilem. Huic trochleae duae affirmatae ſint laminae incuruatae AD, AE, filis circumductae, quae laminas ſemper deſerant, vbi tangentes ſunt verticales, vt in D et E, vnde verticaliter dependeant tracta a potentiis vi inertiae deſtitutis, ne vi opus ſit ad eas mouendas. Sit ſitus FDAEG ſtatus aequilibrii, ducatur ex A verticalis ABC, quae vna cum trochlea circa A moueri concipiatur; Ita vt machina tum ſit in quiete, cum recta ABC fuerit verticalis. Ex hoc igitur iam ratio diſtantiarum punctorum D et E a recta AC determinatur, ſi datae fuerint potentiae in F et G applicatae.

§. 3. Detorqueatur machina ex ſtatu quietis in ſitum quemuis RMANS, vt recta quae ante fuerat verticalis AC, in ſitum AQ perueniat, angulo CAQ percurſo. Tangent ergo fila MR, NS, a datis potentiis ſollicitata laminas in M et N, vt ſint verticalia. Ex hoc perſpicuum eſt vim potentiae F in R tranſlatae ad vertendam trochleam eſſe auctam, alteram vero G in S tranſlatam eſſe diminutam. Ex quibus conſequitur, machinam in RMANS poſitam nequaquam in quiete permanere poſſe, ſed ad ſitum FDAEG, in quo ponitur aequilibrium, perpetuo tendere. Reipſa igitur, cum nihil impediat, in ſitum aequilibrii feretur; idque motu, quia continuo verſus

eum

eum pellitur, accelerato: eo igitur ſitu quieſcere non poterit, ſed ex eo in contrariam plagam excurret, et ita perpetuo oſcillationes peraget.

§. 4. Machina hac deſcripta, hoc eſt, quod mihi propoſui, problema. *Quomodo laminae* AD, AE *ſint incuruandae, vt oſcillationes reddantur iſochronae, ſeu vt omnes eodem tempore abſoluantur*. Manifeſtum eſt, problema praeſens ex eorum eſſe numero, quae indeterminata appellantur, propter duas curuas AD et AE determinandas; quarum vna tantummodo ex conditione problematis determinatur. Problema igitur tale eſt, vt data harum curuarum altera, altera inueniri poſſit. Erunt deinde ſine dubio caſus, quibus hae duae curuae ſunt inter ſe aequales et ſimiles. Quamobrem hanc quaeſtionem bipartitam propono, vnde duplex naſcitur ſolutio. Primo nempe methodum tradam, *qua data altera curuarum altera inueniri queat*; deinceps, *quomodo ii eruendi ſint caſus, quibus ambae curuae ſint inter ſe aequales et ſimiles.*

§. 5. Ad ſolutionem harum quaeſtionum animum attendere conuenit ad duo puncta curuarum AD et AE homologa, quae mihi ſunt ea, in quibus ſimul laminae a filis tanguntur, vt D et E, item M et N. Horum punctorum haec eſt mutua relatio, vt diſpoſitis curuis ad communem de-

 bitum-

bitumque axem AQ, tangentes in iis punctis ſint parallelae vt MR, NS. In ipſo ſtatu aequilibrii FDAEG ſunt eae tangentes ipſi axi parallelae, in aliis poſitionibus non item, ſed faciunt cum axe angulum; ex quo *angulus declinationis* CAQ, ſeu qui metitur diſtantiam ſitus machinae a ſtatu quietis cognoſci poterit, ſunt enim inter ſe aequales. Quia enim NS parallela eſt AC, erit angulus, quem SN producta cum axe QA conſtituit, aequalis angulo CAQ.

Fig. 2. §. Vt hoc diligentius perſequar, ſint AM et AN duae curuae quaeſitae, quarum axis communis ſit AC. Capiantur in iis duo puncta homologa M et N, erunt tangentes MR, NS inter ſe parallelae. Ducantur applicatae MP, NQ, erit ſumma angulorum PMR + QNS aequalis duobus rectis. Siue ducantur normales MT, NA in curuas, erunt anguli PMT, QNV inter ſe aequales. Sed quia ſubnormales PT, QV, ad contrarias plagas diriguntur, erit angulorum PMT, QNV, alter alterius negatiuus. Porro cum anguli tangentium cum axe AC ſint aequales angulis PMT, QNV, ſequitur angulum declinationis machinae aequalem eſſe alterutri angulorum normalibus et applicatis contentorum.

Fig. 3. §. 7. His expoſitis ad ipſius machinae motum me conuerto. Peragat trochlea ABO oſcillationes, et dum ad ſtatum naturalem tendit, per-

veneri

venerit in ſitum RMANS, et axis in AQ, diſtans a verticali AC angulo CAQ, ſeu BAO. Inſit in puncto O velocitas ex altitudine v oriunda, qua circumferentia trochleae conuertitur. Sit pondus trochleae $=$P, erit vis viua, quae ineſt in trochlea, ſi ea fuerit vbique aequaliter craſſa et grauis, $=\frac{1}{2}Pv$. Nam ſi omnes trochleae partes eadem velocitate ex alt. v acquiſita mouerentur, tum foret vis viua $=Pv$. Cum autem partes, quo centro ſint propinquiores, eo tardius moueantur, vis viua dimidio ſit minor, vt computum inſtituenti liquebit.

§. 8. Progrediatur puncto temporis machina in ſitum $rmAns$, axisque AQ in Aq, vt ergo angulo OAo angulus declinationis diminuatur. Punctum igitur M perueniet in m, et N in n, eritque ang. $OAo = MAm = NAn$ propter vniformem totius machinae motum angularem. Interim potentia in R applicata deſcendit in r, at altera in S aſcendit in s; eritque ob $MR = mr$, lineola Rr parallela et aequalis lineolae Mm. Et ſimili modo Ss parallela erit et aequalis elemento Nn. Ducantur horizontales, $r\varrho$, $S\sigma$ nec non $m\mu$, $N\nu$, quae producantur in I et K ad verticalem AC vsque. Transitu hoc per Oo aucta erit velocitas circumferentiae trochleae, vt ſit nunc $=$ veloc. ex alt. $v+dv$ acquiſitae. Vnde vis viua trochleae in praeſenti ſitu eſt $=\frac{1}{2}P(v+dv)$.

§. 9. Abſoluto ergo angulo OAo, vis viua trochleae aucta eſt elemento $\frac{1}{2}Pdv$, quod incrementum ortum ſuum debet potentiis in R et S applicatis. Quamobrem inueſtigabo quanta hac temporis particula ab his potentiis genita ſit vis viua. Sit pondus potentiae in R aequiualens $= R$ pondus potentiae in S aequiualens $= S$. Perſpicuum eſt a potent. R deſcenſu per $R\varrho$, genitam eſſe vim viuam $R.R\varrho$ ſeu $R.M\mu$. At vero a potentia S propter aſcenſum per σs deſtructa eſt vis viua $S.s\sigma$ ſeu $S.n\nu$. His coniunctis generata habebitur vis viua $= R.M\mu - S.n\nu$. Huic vi genitae, aequale eſſe debet incrementum reipſa deprehenſum $\frac{1}{2}Pdv$. Quocirca haec acquiritur aequatio, $\frac{1}{2}Pdv = R.M\mu - S.n\nu$.

§. 10. Propter triangula ſimilia $Mm\mu$, mAI, et $Nn\nu$, ANK, erit $M\mu = mI.Mm:Am$ et $n\nu = NK.Nn:AN$. Eſt autem $Mm:Am = Oo:AO$. Ergo $M\mu = mI.Oo:AO$; et $n\nu = NK.Oo:AO$. Propterea haec emergit aequatio $\frac{1}{2}P.AO.dv = R.mI.Oo - S.NK.Oo$. Eſt vero $Oo:AO = $ ang. OAo. ergo $\frac{1}{2}P.dv = (R.mI - S.NK)OAo$. Hic autem angulus OAo eſt elementum anguli BAO, qui aequalis eſt angulo, quem applicata curuae AM vel AN in axem AQ ducta cum normali in curuam conſtituit. Huius igitur anguli elementum aequatur elemento OAo. Ex quo apparet elementum dv in quantitatibus ex curuis datis exprimi, neque lineas vtriusque curuae inter ſe eſſe

per

permixtas. Datis itaque curuis laminarum hoc modo motus trochleae inuenietur, et inde oſcillationes, de quibus iudicari poterit, vtrum ſint iſochronae, an ſecus.

§. 11. Conſideremus nunc eam conditionem, qua oſcillationes trochleae iſochronae eſſe debent. Accipiamus in circumferentia trochleae punctum, quod in infimo loco ſtat machina quieſcente, id quod eſt punctum O. Neceſſe ergo eſt, vt et hoc punctum oſcillationes iſochronas conficiat, ſeu vt aequalibus temporibus, vbicunque motum inchonuerit, ad infimum punctum B perueniat. Ad hoc oportet, vt accelerationes puncti O verſus B ſint vt viae deſcribendae, donec ad B perueniant, id eſt, vt anguli OAB. Ex quo fluit fore dv vt BO. Oo, pono autem adv = BO. Oo.

§. 12. Valore hoc loco dv in ſuperiore aequatione ſubſtituto, haec prouenit aequatio $\frac{1}{2}$P. AO. BO. Oo = R. a. mI. Oo − S. a. NK. Oo. Diuidatur per Oo, et multiplicetur per 2. orietur P. AO. BO = 2 R. a. mI − 2 S. a. NK. Quae a differentialibus quantitatibus prorſus eſt libera. Mutetur paululum conſtans, eritque P. b. BAO = R. mI − S. NK. Poteſt autem ang. BAO in ipſis curuis AM, AN exhiberi, et quantitatibus ad eas pertinentibus exprimi. Vnde ſequitur aequationem inuentam ſufficere ad problema ſoluendum.

§. 13. Quod aequatio primum differentialis inuenta ſit, ea vero diuiſione facta per quantitatem differentialem ad integralem ſit reducta, id indicat ſine differentialibus ſtatim ad inuentam algebraicam aequationem perueniri poſſe ſequenti modo multum breuiore et faciliore. Momentum potentiae R, ad trochleam conuertendam eſt R.mI, alterius potentiae S, eſt S. NK. Quia hoc illi contrarium eſt atque minuit, trochlea ab O ad B ſollicitatur a vi R.mI−S.NK, huicque vi proportionalis eſt acceleratio, quae, vt oſcillationes ſint iſochronae, debet eſſe vt via deſcribenda id eſt vt BO, vel BAO, vel quoque vt P.b.BAO. cui aequalis poni poteſt, eritque vt ſupra P.b.BAO $=$R.mI−S.NK.

Tabula VI. Fig. 1. §. 14. Sunt vero mI, NK, perpendicula ex A in tangentes; et BAO aequatur angulo, quem tangentes cum axe conſtituunt. Facta igitur applicatione ad ſequentem figuram reperitur haec aequatio P.b.ATM$=$R.AP−S.AQ. Sumatur eius differentialis Pb.dATM $=$ R.dAP−S.dAQ. Eſt vero d.ATM$=$angulo, quem duo elementa curuae proxima inter ſe conſtituunt, idcirco $=$ angulo a duobus normalibus infinite propinquis intercepto, qui habetur elemento curuae per radium oſculi diuiſo; qui quotus in vtraque curua idem eſſe debet propter tangentes parallelas, in altera vero negatiuus eſſe debet eius, qui in altera accipitur. Hanc ob rem pono AM$=y$,AP$=p$,PM

$=$



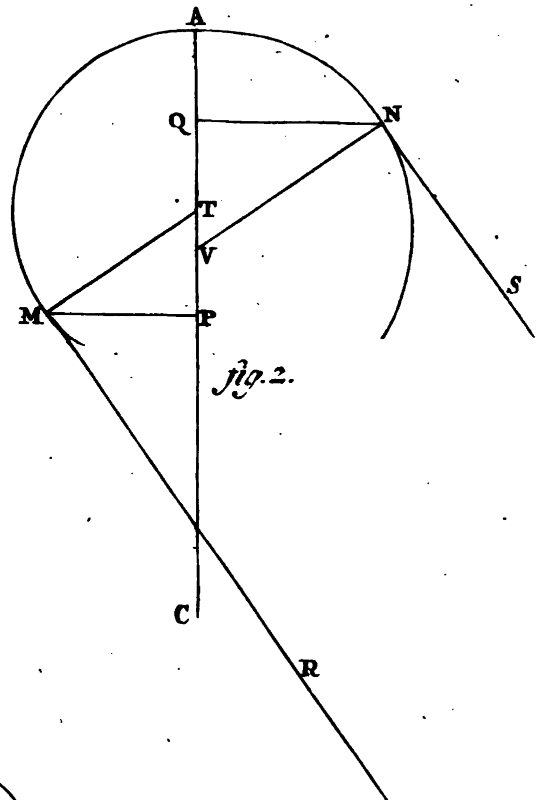


fig. 2.

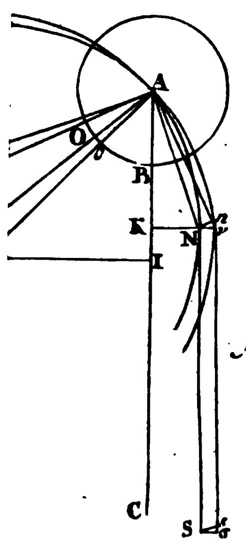


fig. 3.

$= \sqrt{(yy-pp)} = q$, atque $AN = z$, $AQ = r$, $QN = \sqrt{(zz-rr)} = s$. Erit radius oſculi ibi $= y\,dy:dp$. hic vero $= z\,dz:dr$. Deinde elementum curuae in illa $= y\,dy:q$; in hac $= z\,dz:s$; vt ergo elementum ang. ATM ſit ex illa curua $= dp:q$, ex hac $= dr:s$. Oportet vero eſſe $dp:q = -dr:s$.

§. 15. His valoribus ſubſtitutis, proueniet haec aequatio $Pb\,dp:q = R\,dp - S\,dr$. Eſt vero $-dr:s = dp:q$, vnde $dr = -s\,dp:q$, quo ſubſtituto aequatio reſultans $Pb\,dp : q = R\,dp + S\,s\,dp:q$ diuidi poterit per dp, quo facto, et multiplicato per q. habebitur iſta aequatio $Pb = Rq + Ss$. Ex qua haec fluit proprietas curuarum quaeſitarum, vt ſumma R.PM + S.QN ſemper ſit conſtans ſumtis tangentibus parallelis. Habentur ergo duae hae aequationes $Pb = Rq + Ss$ et $s\,dp + q\,dr = o$. Ex quibus iunctis problemati facile ſatisfiet.

§. 16. Applicemus haec ad axem AT. Ducantur applicatae MX, NY; ſitque $AX = x$, $XM = y$, et $AY = v$; $YN = z$. Erit $PM = q = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et $QN = s = \frac{v\,dv + z\,dz}{\sqrt{(dv^2 + dz^2)}}$. Atque ob tangentes PM, QN inter ſe parallelas erit $dx:dy = dv:-dz$, ſeu $dz = -dv\,dy:dx$. Superior vero aequatio $Pb = Rq + Ss$ transmutabitur in hanc $Pb = R(x\,dx + y\,dy):\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + S(v\,dv + z\,dz):\sqrt{(dv^2 + dz^2)}$ ſubſtituatur loco $dz, -dv\,dy:dx$; erit $Pb = R(x\,dx + y\,dy):\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + S(v\,dx - z\,dy):\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Vnde elicietur $z = v\,dx:dy + (R(x\,dx + y\,dy) - Pb\sqrt{(dx^2 + dy^2)}):S\,dy$. Vocetur $dx:dy = \xi$: et

(R(xdx

$(R(xdx+ydy)-Pb\surd(dx^2+dy^2)):Sdy=B$. erit $z=\xi v+B$; vnde $dz=\xi dv+vd\xi+dB=-dvdy:dx=-dv:\xi$. Conſequenter $dv+\xi\xi dv+v\xi d\xi+\xi dB=0$; diuidatur per $\surd(1+\xi\xi)$ erit $dv\surd(1+\xi\xi)+v\xi d\xi:\surd(1+\xi\xi)+\xi dB:\surd(1+\xi\xi)=0$. Quae integrata dat $v\surd(1+\xi\xi)+\int\xi dB:\surd(1+\xi\xi)=C$. Quocirco erit $v=\frac{C-\int\xi dB:\surd(1+\xi\xi)}{\surd(1+\xi\xi)}$ ac $z=\frac{C\xi+B\surd(1+\xi\xi)-\xi\int\xi dB:\surd(1+\xi\xi)}{\surd(1+\xi\xi)}$.

§. 17. Eſt autem ſubſtituto loco B valore debito nempe $(R(x\xi+y)-Pb\surd(1+\xi\xi)):S$, $\int\xi dB:\surd(1+\xi\xi)=Rx\surd(1+\xi\xi):S-\frac{Pb}{S}\int\frac{\xi\xi d\xi}{1+\xi\xi}$. Vnde fit $v=\frac{CS-Rx\surd(1+\xi\xi)+Pb\int\xi\xi d\xi:(1+\xi\xi)}{S\surd(1+\xi\xi)}$ atque $z=\frac{CS\xi+Ry\surd(1+\xi\xi)+Pb\xi\int d\xi:\xi\xi(1+\xi\xi)}{S\surd(1+\xi\xi)}$. Data ergo curua alterutra AN, ſeu aequatione inter v et z, ſi in ea loco v et z valores inuenti ſubſtituantur, habebitur aequatio inter y et x, ſeu altera curua. Sed ſi ad commoditatem conſtructionis attendamus, detur curua AM ſeu aequatio inter x et y; et inuenietur ex dato quouis puncto M, eius homologum N, propter AY et YN, quae per quadraturas facile determinantur. Perſpicuum vero eſt alteram curuam ex altera conſtrui ope quadraturae circuli; et ideo vtramque non poſſe eſſe algebraicam.

§. 18. Si habeatur pro alterutra curua aequatio inter perpendiculum in tangentem et ipſam tangentem, totum negotium multo facilius expe-

pedietur. Poſitis enim $AP=p$, $Pm=q$, et $AQ=r$, $QN=s$, erit per §. 15. $Pb=Rq+Ss$ atque $sdp+qdr=o$, vnde elicitur $s=(Pb-Rq):S$. atque $dr=-sdp:q=-dp(Pb-Rq):Sq$. Data ergo aequatione inter p, et q, inde inuenietur aequatio inter s et r. Seu facilius ſi habeatur aequatio inter r et s, ſubſtituantur pro s et r valores in p et q, prodibitque aequatio inter p et q. Data ergo alterutra harum curuarum, altera facile reperitur.

§. 19. Illuſtremus hanc regulam exemplis nonnullis. Sit altera curua AN circulus, cuius peripheria per A tranſit, ſit eius radius $=a$. Erit $rr-2ar+ss=o$ ſeu $r=a+\sqrt{(aa-ss)}$ indeque $dr=-sds:\sqrt{(aa-ss)}$. Ponatur loco dr, $-dp(Pb-Rq):Sq$ et loco s, $(Pb-Rq):S$, ergo loco ds, $-Rdq:S$, proueniet haec aequatio $dp=-Rq\,dq:\sqrt{(SSaa-(Pb-Rq)^2)}$. Quae aequatio exprimit naturam alterius curuae, et quia eſt ſeparata, per quadraturas conſtrui poteſt. Quum hoc modo inueniantur puncta homologa, poterit altera vtcunque applicata reſpectu axis AT, altera quoque applicari, hoc obſeruato, vt tangentes in punctis homologis vnico tantum in caſu ſint parallelae; perſpicuum ergo eſt, easdem curuas infinitis modis applicatas ſatisfacere poſſe.

§. 20. Sit altera curua AN rurſus circulus, centrum in A habens erit r conſtans et $s=o$, vn-

de $q = Pb : R$, adeoque conſtans. Eſt igitur ob hanc proprietatem curua quaeſita nata ex euolutione circuli, idque talis cuius radius eſt $Pb : R$. Modus vero huius applicandae hic eſt, vt centrum circuli generatoris ponatur ſuper centro trochleae A. Quod haec curua talis eſſe debeat, ex Diſſert. *de nouo quodam tautochr. genere* in Comm. A. 1727. inſerta colligi poteſt. Cum enim altera curua AN ſit circulus centrum in A habens pondus ſeu potentia S, in quouis ſitu eundem exerit effectum, vt ergo altera curua ſola tautochronismum producere debeat. Qui, cum ſit ille caſus citatus, neceſſe eſt, vt curua quaeſita eadem ſit, vt ibi, genita ex euolutione circuli.

Tabula VI. Fig. 2. §. 21. Progredior iam ad alterum problematis caſum, et inueſtigo caſus quibus ambae curuae ſint inter ſe eaedem et circa axem ſimiliter applicatae. Sint ergo curuae AM, AN eaedem circa axem AC ſimiliter poſitae. Oportet inuenire talem aequationem inter coordinatas AX, x et XM, y, vt poſito in ea $x = AY$, v, fiat $y = NY = z$. Ad hoc efficiendum duas haſce proprietates inuentas conſidero; primo, vt ductis normalibus MT et NV ſeu nV, ſit ang. $XMT = YNV = YnV$; deinde vt ſit $Pb = R.PM + S.QN$. Sed quia curuae ſunt aequales et ſimiliter applicatae, neceſſe eſt vt ſit $R = S$, ponatur autem $Pb : R = 2c$, erit altera proprietas hac aequatione contenta, $PM + QN = 2c$, ſeu $PM + qn = 2c$.

§. 22.

§. 22. Huc ergo problema eſt reductum, vt inueniatur curua A*n*M talis, vt, ſi in ea accipiantur duo puncta M et *n*, ex quibus normales MT et *n*V ductae cum applicatis MX, *n*Y angulos conſtituant, alterum alterius negatiuum, ſeu quae ſe mutuo ad angulos rectos interſecent; ductis deinde tangentibus MP et *nq*, in easque demiſſis ex A perpendiculis AP, A*q*, vt, inquam, ſit ſumma $PM+nq$ conſtans ſeu aequalis, $2c$. Quamobrem quaero aequationem inter tangentem PM, et angulum XMT, ſeu quantitatem inde pendentem, quae facto angulo negatiuo, ipſa quoque negatiua euadat, talem, vt, ſi loco anguli XMT, ſeu quantitatis vicem eius gerentis eius negatiuum ponatur, PM transmutetur in aliam quae cum PM efficiat ſummam $2c$.

§. 23. Cum ſinus anguli cuiusuis, facto angulo negatiuo, abeat in ſui negatiuum, loco anguli adhibeo eius ſinum, ſit igitur ſinus anguli $XMT = \xi$, et tangens $PM = q$, requiritur aequatio inter ξ et q, in qua, loco ξ poſito $-\xi$, q abeat in s, vt ſit $q+s=2c$. Hanc ob rationem pono $q=c+Q$, deſignante Q functionem quamcunque imparem ipſius ξ, facto enim ξ negatiuo et Q abibit in $-Q$, vt ergo ſit $s=c-Q$, ſumma igitur $q+s$ erit $=2c$, vt requirebatur.

§. 24. Inuenta autem aequatione inter q et ξ, oportet ex ea aequationem inuenire inter coor-

dinatas AX, XM ſeu inter x et y; id quod ſequenti modo efficietur. Si $AX = x$, et $XM = y$, erit ſinus anguli $XMT = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et tangens $MP = (xdx + ydy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Erit itaque $\xi = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ et $q = (xdx + ydy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. His igitur valoribus in aequatione inter ξ et q ſubſtitutis, reſultabit noua aequatio inter x et y, ex qua curua qualis ſit cognoſcetur. Ponatur vero $dy = pdx$, erit $\xi = p : \sqrt{(1 + pp)}$ vnde patet ξ abire in negatiuum, ſi p fiat negatiuum. Quamobrem loco Q poni poteſt functio quaecunque impar ipſius p, et erit $q = (xdx + ydy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = c + Q$, ſeu $(x + py) \sqrt{(1 + pp)} = c + Q$.

§. 25. Aequatio ergo inter x et y pro curua quaeſita talis eſſe debet, vt poſito $dy : dx = p$, ſit $(x + py) : \sqrt{(1 + pp)} = c + Q$ denotante Q functionem imparem ipſius p, ſiue cum et $Q\sqrt{(1 + pp)}$, ob $\sqrt{(1 + pp)}$ functionem parem ipſius p, ſit functio impar, ſcribatur loco $Q\sqrt{(1 + pp)}$ ſolum Q; et erit $x + py = c\sqrt{(1 + pp)} + Q$. Subſtituendis igitur loco Q determinatis functionibus ipſius p, et deinde loco p eius valore $dy : dx$, habebuntur aequationes, quas non niſi x et y cum ſuis differentialibus et conſtantibus ingrediuntur.

Tabula VI. Fig. 3. §. 26. Relatio, quam Q et p inter ſe habere debent, optime exprimetur curua MAm, quae circa punctum A habet arcus ſimiles et aequales con-

contrarie poſitos, vt ex inſpectione palam eſt. Si enim per punctum A, quod tanquam centrum eſt figurae, ducatur recta Pp, eaque tanquam axis conſideretur, in quem demittantur applicatae PM. Dico abſciſſis AP exprimentibus p, applicatas PM deſignare poſſe Q. Nam ſumta AP negatiua vt Ap, applicata pm erit applicatae PM aequalis, eiusque negatiua, vt ergo quantitas applicatam PM exprimens ſit functio ipſius p impar, et propterea Q exhibere poſſit.

§. 27. Quaeritur nunc quomodo ex curua hac data inueniri et conſtrui poſſit curua quaeſita coordinatis orthogonalibus x et y contenta; ſeu quomodo ex p et Q datis inueniri et conſtrui poſſint x et y. Id quod ſequenti modo efficietur. Cum ſit $x+py=c\surd(1+pp)+Q$, erit $dx+pdy+ydp=cpdp:\surd(1+pp)+dQ$. Quia vero eſt $dy=pdx$, erit $dx=dy:p$; vnde $dy(1+pp)+ypdp=cppdp:\surd(1+pp)+pdQ$. Diuidatur per $\surd(1+pp)$ et habebitur $dy\surd(1+pp)+ypdp:\surd(1+pp)=cppdp:(1+pp)+pdQ:\surd(1+pp)$. Quae integrata dat $y\surd(1+pp)=c\int ppdp:(1+pp)+\int pdQ:\surd(1+pp)$. Quamobrem erit $y=\frac{cp-c\int dp:(1+pp)+\int pdQ:\surd(1+pp)}{\surd(1+pp)}$. Quoniam vero eſt $x=Q+c\surd(1+pp)-py$, erit $x=\frac{c+cp\int dp:(1+pp)+Q\surd(1+pp)-p\int pdQ:\surd(1+pp)}{\surd(1+pp)}$. Ex quibus conſtat et x et y, in meris p et Q dari, et conſequenter curuam quaeſitam ex data MAm conſtrui poſſe.

§. 28. Vt exempla habeamus huiusmodi curuarum tautochronarum, pono $Q = ap$, erit $x + py = c\sqrt{(1+pp)} + ap$, vnde, facto $y - a = z$, fiet $xx + 2pxz + ppzz = cc + ccpp$, ergo $pp = \frac{2pxz + xx - cc}{cc - zz}$ conſequenter $p = \frac{xz \pm c\sqrt{(xx+zz-cc)}}{cc-zz} = dy:dx = dz:dx$, ſiue $ccdz - zzdz - xzdx = cdx\sqrt{(xx+zz-cc)}$. Hanc aequationem, etſi ad rationalitatem reductam, nullo modo neque ſeparare neque integrare potui, id quod mihi magnopere mirum videtur, cum vti perſpicuum eſt curua nihilominus conſtrui poſſit. Eſt enim $y = \frac{cp - a\sqrt{(1+pp)} - c\int dp:(1+pp)}{\sqrt{(1+pp)}}$ ſeu $z = \frac{cp - c\int dp:(1+pp)}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $x = \frac{c + cp\int dp:(1+pp)}{\sqrt{(1+pp)}}$. Aequatio ergo inuenta conſtruibilis eſt, quanquam conſuetis modis reducendi nequaquam ſeparari vel integrari poſſit. Non dubito, quin ex facie conſtructionis huius aequationis cognita multa praeclara de aliis aequationibus inſeparabilibus inueniri queant.

§. 29. Modum hunc ad aequationes ſeparatu tam difficiles perueniendi conferens cum ſchediaſmate Celeb. *Hermanni* actorum Tomo II. inſerto, pag. 188. quo methodum tradit infinitas aequationes differentiales conſtruendi, deprehendi Virum Celeb. ope ſimilis aequationis ei, ex qua noſtrae aequationes deducuntur, quam vocat Canonicam, ad eiusmodi aequationes perueniſſe. Ea igitur methodo omnes aequationes, quae noſtro problemati ſatisfaciunt, quaeque forte cuiquam

prorſus

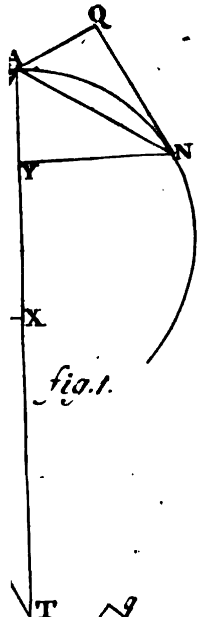


fig. 1.

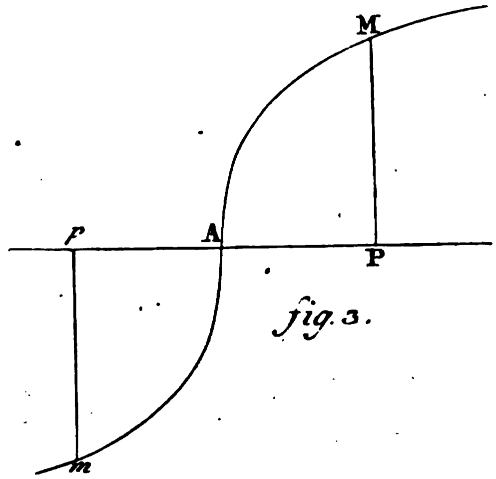


fig. 3.

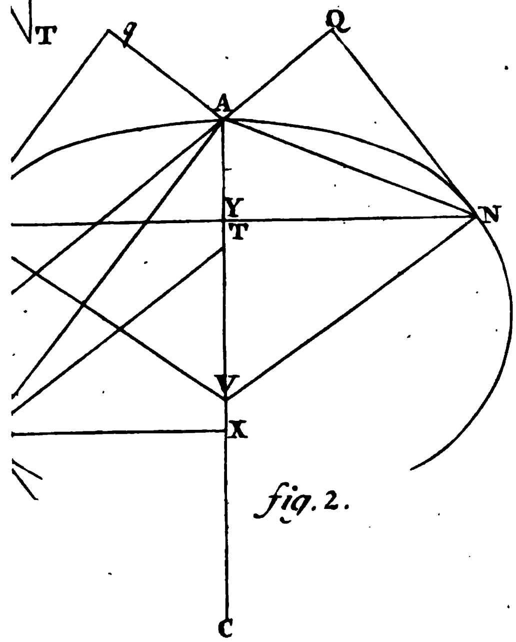


fig. 2.

prorſus inſeparabiles videri queant, conſtrui poterunt. Et ſane *Hermannus*, cum aequationem §. 28. cum eo communicaſſem, eam ſtatim ope methodi ſuae ſeparauit, eandemque conſtructionem inuenit, quam ego a poſteriori cognitam hic appoſui. Dubitari itaque nequit, quin Vir Celeb. plurium aequationum, quae adhuc inſeparabiles habitae ſunt, ſeparationem ſit daturus.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

EXperientia conſtat corporum in ſe mutuo incurrentium motus immutari; quaeſtio igitur hinc nata eſt, quae ſit huius alterationis motus cauſa. Dubitari quidem non poteſt, quin in ipſo corporum conflictu ratio huius phaenomeni inueſtigari debeat; corpus enim omne ſiue quieſcens ſiue motum perſeuerat in ſuo ſtatu, niſi a vi quapiam cieatur et ex ſtatu ſuo deturbetur. Quamobrem quaeſtio huc eſt reducta, vt definiatur, qua in re inſit haec vis et quanta ſit, quae motus mutationem in conflictu corporum producere valet. Praeterea etiam determinari debet, quantam Tabula VII.

tam

tam in colliſione vtriusque corporis motus mutationem ſubeat.

§. 2. Inuentae ſunt iam ſuperiore ſeculo a viris maxime meritis *Wrenno*, *Walliſio* et *Hugenio* regulae communicationis motus ex quibus cognoſcitur, duobus corporibus in ſe inuicem incurrentibus, quanta futura ſit vtriusque corporis poſt conflictum celeritas. Regulae etiam iſtae experimentis egregie confirmantur, vt de earum veritate nefas eſſet dubitare. Variis tamen incedentes viis illi ad has regulas peruenerunt, et poſtmodum ab aliis plures ac diuerſae inuentae ſunt demonſtrationes. Harum autem nulla, quantum mihi videtur, eſt genuina, ſed deriuatae ſunt omnes ex alienis principiis.

§. 3. Accedit ad hoc, quod nullus adhuc ipſam alterationis motus cauſam monſtrauerit, neque quomodo corpora in ſe mutuo agere poſſint, explicuerit. Hanc ob rem operae pretium fore exiſtimaui, iſtam diſſertationem proponere, in qua regulae communicationis motus ex certiſſimis mechanicae principiis deducantur; ſimulque oſtendatur, quomodo in ipſa colliſione corpora in ſe mutuo agant motusque immutent.

§. 4. Accipio hic tanquam indubitatum principium, omnem motus vel diminutionem vel augmentationem vel directionis mutationem produci a po-

a potentiis, idque ſucceſſiue non ſaltu. Facile hoc a quoquam concedetur: nihil enim contra id afferri poſſit, niſi ipſa motus in colliſione communicatio, in qua an natura non faciat ſaltum a multis eſt disputatum. Statuo igitur in concurſu duorum corporum vtriusque corporis celeritatem a potentia inter corpora illa delitente immutari.

§. 5. Corpora in ſe mutuo impingentia vim actionis potentiae ſimilem ſentire eluceſcit praecipue in mollioribus corporibus vt cera vel argilla: facile enim perſpicitur impreſſiones, quas ſunt conſequuta, non ſubito ſed pedetentim eſſe factas; ex quo etiam ad duriora corpora concludere licet, ſucceſſiue et per gradus mutationem fieri. Omnia autem corpora conflictu ſibi mutuo impreſſiones imprimunt, quanquam hoc non de omnibus apparet. Sunt enim corpora, quae impreſſionem ſeu mutatam in conflictu formam non retinent, ſed priſtinam formam recuperant, quae elaſtica vocantur; illa vero quae mutatam in conflictu formam ſeruant, mollia.

§. 6. Inter haec duo genera innumerabiles continentur gradus intermedii; eorum ſcilicet corporum, quae impreſſiones acceptas ex parte tantum, non penitus, exuunt, ad quorum claſſem ſine dubio omnia quae in mundo ſunt corpora, pertinent. Neque enim perfecte reperietur corpus elaſticum neque perfecte molle, ſed omnia medii

inter haec generis deprehenduntur. Corpora porro tam elaſticitate deſtituta ſeu mollia, quam elaſtica etiam differunt ratione duritiei, ſecundum quam alia aliis magis vel minus ſunt dura. Durius autem vocatur corpus quod ab eadem vi minorem impreſſionem accipit, ex hocque intelligitur, quid ſit corpus perfecte durum, quod nimirum a quaque vi finita infinite paruam tantum impreſſionem accipiat. Prout ergo haec impreſſio vel reſtituitur vel ſecus, corpus perfecte durum vel ad elaſticorum vel non elaſticorum claſſem pertinebit.

§. 7. Quando duo corpora elaſtica inter ſe collidunt alterum comprimit alterum, et ſibi impreſſiones infligunt; poſtmodum vero ſe rurſus in priſtinam formam reſtituunt. Quamdiu corpora comprimuntur vel vtrumque corpus vel alterutrum ſaltem de motu ſuo amittit. Quando vero ſe reſtituunt, tum etiam motus in compreſſione amiſſus reſtituitur, ſed aliter inter corpora diſtribuitur. In non elaſticorum conflictu autem impreſſionem quam vtrumque accepit maximam retinet. Ad motum igitur corporum elaſticorum poſt conflictum determinandum, requiritur, vt vtriusque corporis inueſtigetur celeritas tum quando ſunt prorſus reſtituta. Pro corporibus vero non elaſticis, inueniri debet vtriusque corporis celeritas quam habet in ſtatu maximae impreſſionis.

§. 8. Quemadmodum ad omnem motum generandum opus eſt potentia, ita etiam ad partes

cor-

corporis comprimendas et impreſſiones faciendas potentia requiritur; corpus enim omne vi inertiae vti motui ita quoque impreſſioni accipiendae reſiſtit, quae a potentia ſuperari debet. Hanc impreſſionis accipiendae difficultatem vt clarius percipiamus, corporibus annexa concipio elaſtra in loco, quo impreſſiones recipiunt. Loco igitur impreſſionum elaſtra haec comprimi pono; eodem enim redit ſiue id, quod comprimitur, ſit ipſius corporis pars, ſiue elaſtrum corpori adiunctum.

§. 9. Inter corpora igitur A et B concurrentia pono elaſtrum *ab*, quod dum pergunt ad ſe inuicem accedere comprimatur. Haecque compreſſio elaſtri tamdiu durat, quoad motus, quo ad ſe inuicem accedunt, vim elaſtri poteſt ſuperare, tunc ergo elaſtrum erit in ſtatu maximae compreſſionis. Deinde ſi corpora ſunt elaſtica, pono elaſtrum hoc interpoſitum vi ſeſe reſtituendi pollere, ſi vero non ſunt elaſtica, concipio, elaſtrum cum in ſtatum maximae compreſſionis eſt reductum, ſubito omnem vim ſeſe expandendi amittere. Fig. 1.

§. 10. Hac ratione conflictum conſiderantes poterimus ex legibus Mechanicis, quas potentiae in alterandis motibus ſeruant, mutationes motuum in colliſione corporum ſupputare. Notum enim eſt quantam celeritatem data potentia in datum corpus agens dato tempore generare, nec non ſi fuerit motus corporis potentiae contrarius, de-

ſtruere valeat. Elaſtrum autem inter corpora concurrentia conceptum, dum ſe expandere conatur vices potentiae ſubit, et quo id magis comprimitur, magis etiam corporum motus diminuitur.

§. 11. Quo magis elaſtrum iſtud comprimitur, eo etiam maiorem habeat oportet vim ſeſe expandendi, ſed quanta ea ſit in quolibet compreſſionis gradu, non eſt opus vt ſciamus; quamcunque enim ſeruet legem, eadem tamen denique poſt conflictum prodit motus diſtributio. Quantitatem ergo vis elaſtri expanſiuae generali litera vtcunque variabili P deſignabo et a nulla alia pendente. Scilicet P mihi erit pondus, cuius niſui deorſum aequalis eſt vis elaſtri expanſiua.

Fig. 2. §. 12. Incurrat corpus A in elaſtrum AC vim P ſe expandendi habens, celeritate tanta quanta ex altitudine v graue cadendo acquirit, progrediatur puncto temporis per ſpatiolum $Aa = dx$, ſitque celeritas quam in a habebit genita ex altitudine $v + dv$. Perſpicuum eſt ſi eſſet P = A corpus eodem modo retardatum iri, quo furſum proiectum a vi grauitatis retardatur, fore nempe $dv = -dx$, ſi eſſet $P = nA$ foret $dv = -Pdx : A$, ſi vis elaſtri motui corporis eſt contraria: ſed ſi motum promoueat, erit $dv = +Pdx : A$.

Fig. 3. §. 13. Moueatur corpus A in linea AO celeritate altitudini a debita, corpus vero B minori

cele-

celeritate in eadem directione verſus O ex altitudine b oriunda, occurrent haec corpora ſibi inuicem, fietque conflictus. Pono ea tum in ſe mutuo agere incipere, cum diſtantia centrorum fuerit $= f$. Ipſis igitur corporibus vt punctis conſideratis interpoſitum concipio elaſtrum longitudinis f. Sit id AB, quando ergo corpus A reperietur in A, et B in B conflictus incipiet, elaſtrumque, quia A celerius mouetur quam B, magis continuo comprimetur. Fig. 4.

§. 14. Reductum iam ſit elaſtrum ad longitudinem PQ, quam pono $= f - x$. Sit celeritas quam corpus A cum in P venerit habet, ex altitudine v orta, celeritasque corporis B in Q ex altitudine u, et vis elaſtri quam nunc habet ſe expandendi ſit $=$ P. Tempusculo quam minimo progrediatur corpus A per elementum $Pp = dr$ et corpus B per $Qq = ds$; ſitque altitudo exhibens celeritatem quam corpus A in p habebit $= v + dv$, et reſpondens altitudo celeritati corporis B in q $= u + du$. Erit $pq = PQ + Qq - Pp = f - x + ds - dr$, ſed pq aequatur ipſi PQ vna cum ſuo differentiali, i. e. $pq = f - x - dx$. Habebitur conſequenter $dx = dr - ds$.

§. 15. Quia elementa Pp et Qq ſimul ponuntur percurſa, erunt ipſis celeritatibus, quibus percurruntur proportionalia. Quocirca eſt $dr : ds = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, ſunt enim ipſae celeritates vt radices qua-

dratae ex altitudinibus generantibus. Siue habetur $\frac{dr}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dr-dx}{\sqrt{u}}$; ex hac aequatione reperitur $dr = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$, atque $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$.

§. 16. Corpus vero A dum progreditur per $Pp = dr$ contrariam habet vim elaſtri expanſiuam P, eritque propterea ex §. 12. $dv = -Pdr : A$. Simili modo corpus B per $Qq = ds$ transiens a vi elaſtri P acceleratur eritque $du = +Pds : B$. Ex his aequationibus coniunctis reperitur $-Adv - Bdu = Pdr - Pds = Pdx$. Sumantur integralia erit conſt. $-Av - Bu = \int Pdx$, fiat autem $\int Pdx = o$, ſi ponatur $x = o$. Ad conſtantem determinandam ponatur $x = o$, eritque tum $v = a$ et $u = b$, eſt propterea conſt. $= Aa + Bb$. Habemus igitur iſtam aequationem $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$.

§. 17. Reſumamus aequationes $Adv = -Pdr$, et $Bdu = Pds$, ſubſtituamusque pro dr et ds valores inuentos, erit $Adv = \frac{Pdx\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ et $Bdu = \frac{Pdx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$. Habetur ergo ex illa $Pdx = -\frac{Adv\sqrt{v}+Adv\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Erat autem ante $Pdx = -Adv - Bdu$. Ex hisque prodit $Adv\sqrt{u} = -Bdu\sqrt{v}$ ſeu $\frac{Adv}{\sqrt{v}} = -\frac{Bdu}{\sqrt{u}}$. Qua integrata obtinetur $A\sqrt{v} + B\sqrt{u} =$ conſt. $= A\sqrt{a} + B\sqrt{b}$. Talis enim eſſe debet conſtans vt etiam aequatio ante conflictum verum praebeat.

§. 18. Duas ergo inuenimus aequationes iſtas $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$; atque $A(\sqrt{a} - \sqrt{v}) + B(\sqrt{b} - \sqrt{u}) = o$. Ex quibus celeritates cor-

tes corporum in quouis compreſſionis ſtatu durante ipſo conflictu inueniri poſſunt. Ad hoc vero requiritur, vt P ſit cognita functio ipſius x, quo poſſit integrale ſumi et in eo pro x ſtatus compreſſionis aſſumtus ſubſtitui.

§. 19. Hic autem praecipue celeritates vtriusque corporis poſt conflictum deſiderantur. Quaeramus eas primo pro corporibus elaſticis, hocque in caſu finitus eſt conflictus, quando fit iterum $x=0$, adeoque $\int P dx = 0$. Ex quo erit $A(a-v) = -B(b-u)$. Diuidatur altera aequatio per hanc, prodibit $\sqrt{a}+\sqrt{v}=\sqrt{b}+\sqrt{u}$. Atque ex poſtremis his duabus aequationibus facile eruitur $\sqrt{v}=\sqrt{a}+\frac{2B(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{A+B}$ et $\sqrt{u}=\sqrt{b}+\frac{2A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{A+B}$. Hic $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ denotant ipſas corporum A et B celeritates, quas poſt conflictum habebunt; at vero $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ celeritates eorum ante conflictum.

§. 20. Si corpora fuerint omni elaſticitate deſtituta, conflictu finietur, quando elaſtrum eſt maxime compreſſum, hoc euenit ſi eſt $dx=0$ ſeu $dr=ds$, i. e. vbi $v=u$. Aequales ergo corpora non elaſtica habebunt poſt conflictum celeritates, adeoque coniuncta manebunt. Erit autem eorum communis celeritas $\sqrt{v}$ vel $\sqrt{u}=\frac{A\sqrt{a}+B\sqrt{b}}{A+B}$.

§. 21. Poſui in his vtrumque corpus ſecundum eandem plagam moueri, hoc vero non impedit quo minus hae regulae ſint vniuerſales. Notum

tum enim eſt plagam mutari, mutata celeritate in negatiuam. Ita ſi poneretur $-Vb$ loco Vb haberentur regulae communicationis motus pro corporibus in plagas oppoſitas motis.

§. 22. Simili modo inueniri poſſunt regulae communicationis motus pro corporibus non perfecte elaſticis: ad hoc vero requiritur, vt et nota ſit lex vis elaſticae elaſtri, et quousque ſe reſtituere valeat. His autem definitis facile erit motum vtriusque corporis poſt conflictum determinare.

§. 23. Si corpora oblique in ſe impingant, aut ſi plura corpora ſimul collidant, quos poſt conflictum habitura ſint motus, hic eſſet ſuperfluum inueſtigare. Propoſitum enim tantum erat hic regularum colliſionis genuinam dare demonſtrationem: magis autem compoſiti caſus ex his regulis reſoluuntur, eatenusque ſunt extra dubium poſiti, quatenus ab his ſimplicibus pendent.

DE

DE CVRVIS RECTIFICABILIBVS ALGEBRAICIS ATQVE *TRAIECTORIIS RECIPROCIS ALGEBRAICIS.*

Auct. Leonh. Eulero.

QVanquam admodum facile eſt innumeras dare curuas algebraicas, quae rectificari poſſunt, quaerendis vel euolutis vel cauſticis curuarum algebraicarum; tamen ſi ordines curuarum conſideremus, rariſſime in iis occurrunt, quae rectificationem admittant. In ordine linearum ſecundo, qui ex ſectionibus conicis conſtat, nulla eſt huiusmodi; in tertio duae habentur rectificabiles, quantum quidem conſtat. Cum autem ante aliquot annos in inueniendis traiectoriis reciprocis algebraicis occupatus eſſem, methodum Celeb. *Ioh. Bernoulli* primum ſequutus diligentiſſime curuas rectificabiles anquirebam, vt iis ad propoſitum vterer. Detexi etiam in ordine ſexto curuam rectificabilem, quae mihi praebebat traiectoriam algebraicam ordinis quarti, eaque ſatisfeci quaeſtioni tum agitatae, de exhibendis ſimplicioribus traiectoriis reciprocis algebraicis. Inueni quoque multas aequationes generales curuas rectificabiles dantes, ex quibus in promtu erat omnes curuas re-

ctificabiles ſimpliciores eruere. Haec iterum nunc perluſtrans deductus ſum ad generaliſſimam quandam aequationem curuas rectificabiles omnes in ſe continentem. Inſunt enim in ea plures quantitates vniuerſales, pro quibus quicquid ſubſtituatur, curua rectificabilis prodit. Sit quantitas quaedam variabilis z, cuius differentiale ponatur conſtans, ſintque P et Q huius variabilis z functiones quaecunque ſaltem algebraicae. Si iam hoc modo conſtruatur curua vt eius abſciſſa, quae ponatur x, ſumatur aequalis $P + \frac{dQ(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$ et applicata quam voco $y = \frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP - dPddQ}$. Erit huius curuae longitudo s appellata aequalis $Q + \frac{dP(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$. Semper igitur quicunque valores literis P et Q tribuantur, curua erit rectificabilis et algebraica. Demonſtrationem huius dare non opus eſſe iudico, cuilibet enim, ſi ſumſerit differentialia coordinatarum x et y et curuae s, innoteſcet eſſe $dx^2 + dy^2 = ds^2$ labore tantum eſt opus nullo autem artificio.

Haec forma quidem latiſſime patet, ſed habeo tamen aliam adhuc multo generaliorem, imo generaliſſimam ſequentem. Deſignantibus vt ante literis maiuſculis L, M et N functiones quaſcunque variabilis z, ſi ſumantur

$$x = L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dLdN + dM\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

$$y = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

erit longitudo curuae reſpondentis

$s = N$

$$z = N + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2)}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Formulae hae in praecedentes mutantur, ſi ponatur $M = o$, ſunt igitur illae in his contentae.

Facile perſpicitur, ſi literae L, M et N non ſolum ſignificent quantitates algebraicas, ſed etiam tranſcendentes quaſque, in iſtis formulis omnes prorſus contineri curuas tam algebraicas quam tranſcendentes. Quia enim hae functiones L, M et N nullo modo a ſe inuicem ſunt pendentes, nulla excogitari poteſt aequatio inter x et y, ſiue ſit algebraica ſiue tranſcendens, quae non ad praeſcriptas formulas eſſet reducibilis.

Simili modo ſi manente N functione vniuerſaliſſima, ita tamen vt $\frac{dN}{dz}$ ſit functio algebraica L vero et M denotent functiones algebraicas, omnes prorſus curuae algebraicae in formulis datis comprehenduntur; erunt autem eae rectificabiles ſi N aſſumatur functio algebraica, at vero ſi N non fuerit functio algebraica, ſed tranſcendens ſeu a quadratura curuae cuiusdam pendens, curua reſultans non erit rectificabilis, ſed eius rectificatio pendebit a quadratura eius curuae. Hoc igitur modo ſoluitur etiam celebre illud problema multum inter Geometras agitatum, poſtulans methodum quadraturas curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi, cuius ſolutiones duae datae ſunt in Actis Lipſienſibus a Viris Celebr-

leberrimis *Iac. Hermanno* et *Ioh. Bernoullio*. Ex iſtis vero formulis ita ſoluetur; ſint curuae, cuius quadratura ad rectificationem curuae algebraicae eſt reducenda, coordinatae t et v quarum vtraque ſit functio algebraica ipſius z. Sumatur $N = R + a\int v\,dt$, vbi R etiam deſignet functionem ipſius z algebraicam quamcunque. Hoc poſito dabunt formulae traditae omnes curuas algebraicas, quarum rectificatio a quadratura curuae propoſitae, ſcilicet a $\int v\,dt$ pendent, ſi quidem L et M aſſumantur, vt iam eſt monitum, functiones algebraicae ipſius z. Alter vſus harum formularum, quem hic exponere conſtitui, reſpicit ad inuentionem traiectoriarum reciprocarum; reperitur enim ex iis aequatio vniuerſaliſſima omnes traiectorias reciprocas in ſe complectens, quae etiam facillime ita reſtringitur, vt algebraicas tantum easque omnes praebeat.

Tabula VII. Fig. 6. Nititur autem haec inuentio theoremate *Bernoulliano*, quo ex rectificatione curuarum diametrum habentium conſtruuntur traiectoriae reciprocae, hoc modo: MAM eſt curua huiusmodi diametrum habens AP, et verticem A in quo tangens AQ, eſt perpendicularis ad diametrum AP. Per huius curuae ſingula puncta M ducantur rectae diametro parallelae, in iisque ſumantur MN aequales arcubus AM, conſtituent puncta N curuam NAE traiectoriam reciprocam, cuius axis conuerſionis eſt ipſa diameter PAB. Huius curuae ſi ſumatur ab-

ſciſſa

ſciſſa AQ et applicata QN, erit AQ = PM et QN = AM − AP. Quamobrem ſi curuae MAM coordinatae AP et PM eaedem ſumantur, quae ante vocatae erant x et y, habebitur ſtatim aequatio pro traiectoria reciproca EAN. Quia vero non omnis curua in locum MAM collocari poteſt, in aequationibus ſupra traditis literae L, M et N quodammodo reſtringi debent, vt tantum curuas ad inſtitutum accommodatas praebeant. Cum omnes lineae AP, PM et AM ſint functiones ipſius z, ita eae in z determinentur, vt ſumto z affirmatiuo prodeat curuae MAM ramus dexter, at poſito z negatiuo vt prodeat ramus ſiniſter. Ad hoc requiritur, vt AP quia in vtroque caſu eadem manet, ſit functio par ipſius z, ſeu functio quae immutata manet, etiamſi z fiat negatiuum. At PM et AM eſſe oportet functiones ipſius z impares, i. e. quae fiant negatiuae mutato z in $-z$. Quamobrem eſſe debet L functio par ipſius z. M vero et N functiones impares. His enim poſitis abſciſſa aequabitur functioni pari, applicata vero et ipſa curua functionibus imparibus. Nam dL erit functio impar, ddL functio par, dM et dN functiones pares, atque ddM et ddN functiones impares. Ex quo perſpicietur lineas AP, PM et AM requiſitam habituras eſſe proprietatem. Erit igitur

$$AQ = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLdM - ddMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Atque traiectoriae reciprocae EAN applicata erit

$$QN = N - L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2 - dLdN - dM\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Ex hac conſtructione fluent omnes traiectoriae reciprocae, ſi loco L, M et N ſubſtituantur functiones non ſolum algebraicae, ſed etiam tranſcendentes. Algebraicae vero traiectoriae reciprocae omnes habebuntur, ſi eae quantitates fuerint functiones algebraicae, et quidem vt requiritur L functio par, atque M et N functiones impares.

Notandum porro eſt etiam $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$ eſſe debere functionem ipſius z imparem quemadmodum dL. Ponatur igitur $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = dL - dS$, vbi dS eſt functio impar ipſius z, adeoque S functio par erit $\frac{dN^2 - dM^2 + dS^2}{2dS} = dL$, ex quo erit dL functio impar vt requiritur, et $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = \frac{dN^2 - dM^2 - dS^2}{2dS}$. Erit igitur $L = \frac{1}{2}\int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} + \frac{1}{2}S$. Quamobrem vt traiectoria reciproca fiat algebraica, oportet $\frac{dN^2 - dM^2}{dS}$ eſſe integrabile. Erit autem abſciſſa $AQ = M + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)((dN + dM)^2 - dS^2)}{4dS(dSddM + dSddN - dNddS - dMddS)}$ et $QN = N - \frac{1}{2}\int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} - \frac{1}{2}S + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)(4dMdN + (dN - dM - dS)^2)}{4dS(dSddM + dSddN - dNddS - dMddS)}$. Quamdiu autem $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$ manet quantitas ſurda, non opus eſt peculiari determinatione, eſt enim radix quadrata ex functione pari non quadrato tam functio par quam impar.

Spe-

SPECIMEN THEORIAE NOVAE DE MENSVRA SORTIS.

AVCTORE

Daniele Bernoulli.

1.

EX eo tempore, quo Geometrae conſiderare coeperunt menſuras ſortium, affirmarunt omnes, *valorem expectationis obtineri, cum valores ſinguli expectati multiplicentur per numerum caſuum quibus obtingere poſſunt, aggregatumque productorum diuidatur per ſummam omnium caſuum: caſus autem conſiderare iubent, qui ſint inter ſe aeque procliues:* Hacque poſita regula, quodcunque reliquum eſt in iſta doctrina huc redit, vt caſus omnes enumerentur, in aeque procliues reſoluantur atque in debitam claſſem diſponantur.

§. 2. Demonſtrationes huius propoſitionis, quarum quidem in lucem prodierunt multae, ſi recte examines, omnes videbis hac inniti hypotheſi, *quod cum nulla ſit ratio, cur expectanti plus tribui debeat vni quam alteri, vnicuique aequae ſint adiudicandae partes*; rationes autem nullas conſiderari,

quae

perſonarum ſtatum reſpiciant, ſolasque illas perpendi, quae ad conditiones ſortis pertineant. Talem ſententiam ferant iudices ſupremi publica auctoritate conſtituti, at vero hoc loco non iudicia ſed conſilia danda ſunt; regulae nempe, quibus quisque ſuam ſibimet aeſtimare debeat ſortem pro diuerſa rerum ſuarum conſtitutione.

§. 3. Vt appareat, non male hoc ita moneri, pone caſu aliquo homini plane pauperi ſortem contigiſſe, qua pari probabilitate aut nihil aut viginti millia ducatorum obtinebit, an ſortem ſuam hic aeſtimabit decies millenis ducatis, et malene ſibi conſuluerit cum nouem millibus eam vendiderit? Id mihi non videtur, quamuis et credam hominem admodum opulentum ſibi deficere, cum illam ſi potuerit eodem pretio acquirere recuſet: ſi vero hac in re non fallor, perſpicuum eſt, non poſſe omnibus hominibus pro eodem modulo menſuram ſortis aſſignari nec proinde adhaerendum eſſe regulae §. 1. Sed et quiuis perſpiciet, qui haec attente conſiderare voluerit, ita definiri poſſe vocem *valoris*, qua in iſta regula vſi ſumus, vt tota deinceps ſine ſcrupulo omnibus ſit accipienda, nempe *valor* non eſt aeſtimandus ex pretio rei, ſed ex *emolumento*, quod vnusquisque inde capeſſit. Pretium ex re ipſa aeſtimatur omnibusque idem eſt, *emolumentum* ex conditione perſonae. Ita proculdubio pauperis magis refert lucrum facere mille ducatorum quam diuitis, etſi pretium vtrique idem ſit.

§. 4.

§. 4. Eo iam deducta eſt res, vt vnius vocis mutatione quiuis ſibi conſulere poſſit: quia autem noua eſt hypotheſis, indigebit illa dilucidatione aliqua. Conſtitui itaque ſpeciminis loco exponere, quae eam in rem meditatus ſum; Regulae interim fundamentalis loco hac vtemur: *Cum emolumenta ſingula expectata multiplicantur per numerum caſuum, quibus obtinebuntur aggregatumque productorum diuiditur per numerum omnium caſuum, obtinebitur* emolumentum *medium, et lucrum huic* emolumento *respondens aequiualebit ſorti quaeſitae.*

§. 5. Verum ſic liquet, nullam poſſe menſuram ſortis obtineri, niſi ſimul innoteſcat *emolumentum*, quod ex lucro quouis vnicuique venit, et vice verſa quantum lucrum requiratur vt certum inde eueniat emolumentum, qua de re vix eſt vt aliquid certi dici poſſit, quandoquidem a variis circumſtantiis mutari poteſt. Ita quamuis plerumque a lucro ſimili magis alleuetur pauper quam opulentus, poſſet tamen ex. gr. hominis captiui bis mille ducatos diuitis, cui altero tanto opus ſit pro libertate redimenda plus referre lucrum bis mille ducatorum, quam alterius non ita diuitis; huiuscemodi autem exempla quamuis fingi poſſent ſine fine, oppido tamen rara ſunt. Conſiderabimus igitur potiſſimum, quid plerumque contingat atque vt rectius rem intelligamus, bona hominis cenſebimus ſenſim ſenſimque incrementis infinite paruis continuo augeri. Ita vero valde probabile

eſt, *lucrulum, quoduis ſemper emolumentum afferre ſummae bonorum reciproce proportionale.* Dum hanc hypotheſin illuſtrem, dicam quid *bonorum ſumma* mihi ſignificet, nempe omnia ea, quae victum, amictum fortunam commodam, imo et luxum omniumque deſideriorum expletionem ſubminiſtrare, et largiri valent, ita vt nemo nihil habere dici poſſit niſi quem fames extingit, ſitque plurimis bonorum potiſſima pars induſtria, quae vel ipſam mendicitatem in ſe continet: qui mendicando decem annuatim aureos ſibi comparat, is non facile accipiat ſummam quinquaginta aureorum cum conditione vt nihil vnquam ſibi mendicet aut alio modo acquirere tentet, iisque expenſis ſalutem omnem habeat reſciſſam; quinimo de iis etiam, qui nihil habentes aere premuntur alieno, dubito, an ſe eo liberari ſimulque ſummam longe maiorem dono accipere velint cum tali conditione. Iam vero ſi mendicus pactum inire nolit niſi ſummam paratam obtineat minimum centum aureorum, nec ille qui aere alieno laborat niſi mille aureos accipiat, priorem centum, alterum mille aureis diuitem dicemus quamuis communi loquendi modo ille nihil, hic vero minus quam nihil habeat.

§ 6. His ita definitis redeo ad id quod in ſuperiori paragrapho indicaui, nempe niſi quid inſoliti interueniat *aeſtimari poſſe emolumentum lucri valde parui ſummae bonorum reciproce proportionale.* Equidem cum recte conſidero, qua natura homines

com-

comparati eſſe ſoleant, video hanc poſitionem pleriſque applicari poſſe. Pauci ſunt, qui non annuos ſuos reditus dispendant omnes: iam vero, ſi vnius bona valeant centum mille ducatos, alterius totidem ſemiducatos; ſi ille annuos inde reditus obtineat quinquies mille ducatorum, hicque rurſus totidem ſemiducatorum; perſpicuum eſt omni reſpectu priori ducatum eſſe quod alteri ſemiducatum, atque adeo lucrum vnius ducati priori non plus valere, quam lucrum ſemiducati alterum iuuat. Si igitur vterque lucrum faciat vnius ducati, alter duplum inde emolumentum accipiet duos nempe lucratus ſemiducatos, quod exemplum quoniam inſtar omnium eſt, alia afferre ſuperfluum puto. Eo verior eſt haec propoſitio, quod maxima hominum pars bona alia praeter induſtriam vix habet, et ex hac ſola perpetuo viuit. Sunt tamen quibus vnus ducatus magis cordi eſt, quam ſunt plures ducati homini minus diuiti magis autem generoſo. Quia vero nos deinceps conſiderabimus vnum eundemque hominem nihil id ad nos attinebit. Qui minus lucro delectatur, is quoque patientius fert damnum. Verum tamen quia aliquando particulares eſſe poſſunt cauſae, quibus res ſecus ſe habet, pertractabo argumentum generaliſſime, quam ad ſpecialem noſtram deſcendam hypotheſin, vt ſic omnibus ſatisfiat.

§. 7. Denotet igitur AB ſummam bonorum ante ſortem deciſam; dein producta AB conſtruatur Tabula VII. Fig. 5.

 tur

tur ſuper BL curua BGS cuius applicatae CG, DH, EL, FM etc. ceu *emolumenta* reſpondeant abſciſſis BC, BD, BE, BE etc. vt lucris. Sint porro m, n, p, q etc. numeri denotantes, quot modis obtineantur lucra BC, BD, BE, CF, etc. erit (per §. 4.) *emolumentum* medium $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m + n + p + q}$ + etc. Si vero nunc in linea AQ ad lineam AR perpendiculari ſumatur $AN = PO$, erit recta $NO - AB$, id eſt, BP lucrum legitime expectandum ſeu ſors quaeſita. Iam ſi porro ſcire velimus, quantum debeat eſſe depoſitum pro ſorte iſta obtinenda, continuanda eſt curua in partem contrariam, ita vt nunc abſciſſa Bp denotet vbique iacturam, applicata vero po damnum iacturae. Quoniam autem in ludo iuſtae conditionis damnum iacturae debet eſſe aequale emolumento lucri, erit ſumenda $An = AN$, vel $po = PO$, atque ſic denotabit Bp depoſitum, vltra quod nemo ire debet, qui rebus ſuis bene conſulere cupit.

Corollarium I.

§. 8. In hypotheſi hactenus ab auctoribus adhiberi ſolita, qua ponitur lucrum quoduis ex ſe ſolo eſſe aeſtimandum, ſemperque *emolumentum* afferre ſibi ſimpliciter proportionale, ſit linea BS recta: vnde ſequitur ſi fuerit $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m + n + p + q}$ + etc. fore etiam ſumtis ab vtraque parte proportionalibus $BP = \frac{m.BC + n.BD + p.BE + q.BF}{m + n + p + q}$ + etc., quod conforme eſt cum regula communiter adhibita.

Co-

Corollarium 2.

§. 9. Si AB fuerit infinita ratione lucri vel maximi BF, quod ſperatur, erit arcus BM inſtar lineolae rectae infinitae paruae conſiderandus, hocque in caſu rurſus locum habet eadem iſta regula vulgaris, quae adeoque valet proxime in omnibus ludis qui haud magni ſunt momenti.

§. 10. Poſtquam ſic argumentum pertractauimus generaliſſime, pergemus ad hypotheſin illam particularem ſupra memoratam, quae ſane prae omnibus aliis conſiderari meretur. Ante omnia quaerenda eſt natura curuae sBS manentibus poſitionibus paragraphi ſeptimi: quia vero vi hypotheſis lucrula infinite parua ſunt conſideranda, cenſebimus lucra BC et BD tantum non aequalia, ita differentia CD ſit infinite parua; ductaque Gr ipſi BR parallela erit rH *emolumentum* infinite paruum hominis cuius bona ſunt AC et qui facit lucrum minimum CD. Iſtud vero *emolumentum* non ſolum ex lucrulo CD, cui vtique caeteris paribus eſt proportionale, ſed et ex ſumma bonorum AC, cuius rationem ſequitur inuerſam, eſt aeſtimandum. Igitur ſi ponatur $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$; $AB = \alpha$, denotetque b conſtantem quantitatem quamcunque, erit $dy = \frac{bdx}{x}$, vel $y = b \log. \frac{x}{\alpha}$. Eſt itaque curua sBS logarithmica, cuius ſubtangens vbique $= b$ et cuius aſymptotos eſt Qq.

§. 11. Si nunc comparentur haec cum iis, quae paragrapho ſeptimo dicta ſunt, apparebit eſſe $PO = b \log. \frac{AP}{AB}$, $CG = b \log. \frac{AC}{AB}$, $DH = b \log. \frac{AD}{AB}$; et ſic porro; ergo cum fuerit $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EI + q.FM}{m + n + p + q}$ + etc., erit nunc $b \log. \frac{AP}{AB} = (mb \log. \frac{AC}{AB} + nb \log. \frac{AD}{AB} + pb \log. \frac{AE}{AB} + qb \log. \frac{AF}{AB} + \text{etc.}) : (m + n + p + q + \text{etc.})$; vnde deducitur $AP = (AC^m.AD^n.AE^p.AF^q.\text{ etc.})^{1:(m+n+p+q+\text{etc.})}$, et cum ab hac ſubtrahitur AB remanebit BP ſortem denotans quaeſitam.

§. 12. Subminiſtrat praecedens paragraphus hanc regulam: *lucrum quoduis ſumma bonorum auctum eleuetur ad dignitatem indicatam per reſpondentem numerum caſuum; dein omnes hae dignitates inter ſe multiplicentur et ex earum producto extrahatur radix ordinis indicati per numerum omnium caſuum: tum denique a radice ſubtrahatur ſumma omnium bonorum: quod reſiduum eſt, indicabit ſortem quaeſitam.* Atque haec propoſitio eſt principalis pro dimetienda ſorte in variis caſibus, cui nunc vt factum eſt hactenus in hypotheſi communi, theoriam integram, quod opus tum vtilitate tum nouitate ſua ſe commendare poſſet, ſuperſtruerem, ſi id alii incepti labores permitterent. Nunc quidem inter ea, quae ſe mihi prima obtulerunt fronte, notabiliora quaedam tantum allegabo.

§. 13. Et primo quidem apparet, quum conditiones ludi finguntur vel aequiſſimae, vtrumque col-

colluſorum tamen praeiudicium exinde accipere; egregium profecto naturae documentum vitandae aleae.. Sequitur id autem ex concauitate curuae *sBS* verſus *BR*, qua fit, vt facto depoſito *Bp* aequali lucro ſperato *BP*, fit *detrimentum po*, quod ex ſiniſtro eventu oritur ſemper maius emolumento *PO* quod ſperatur. Quamuis autem id ſatis per ſe pateat Geometris, attamen vt intelligatur ab omnibus exemplo illuſtrabo. Sint duo colluſores, quorum quiuis in bonis centum habeat ducatos, horumque partem dimidiam ſorti in vtramque partem aeque procliui committat. His ita poſitis habebit quiuis quinquaginta ducatos vna cum ſpe centum ducatorum: vtriusque autem ſumma per regulam paragr. 12. valet tantum $(50.^{1}150.^{1})^{\frac{1}{2}}$ ſeu $\sqrt{(50.150.)}$ id eſt, minus quam octoginta ſeptem ducatos, ita vt vterque a ludo quamuis aequiſſimae conditionis detrimentum capiat plusquam tredecim ducatorum: at vero vt ſimul appareat veritas illa, quam quiuis naturalis luminis inſtinctu agnoſcit, eo maiorem nempe eſſe aleatoris imprudentiam quo partem bonorum ſuorum notabiliorem fortunae exponat, conſiderabimus idem exemplum hoc ſolo interpoſito diſcrimine, alterum colluſorem ante depoſitos quinquaginta ducatos habuiſſe ducentos: is tunc damnum accipit, quod exprimitur per $200-\sqrt{150.250}$, nempe parum vltra ſex ducatos.

§. 14.

§. 14. Cum itaque inconſiderate agit, quicunque paribus conditionibus vel minimam bonorum ſuorum partem alearum fortunae credit, conueniet hic inquirere quamnam in deponendis nummis quiuis praerogatiuam habere debeat prae colluſore, vt ſine praeiudicio ludum inire poſſit. Ludum vero fingemus ſimpliciſſimum rurſus, duobus nempe definitum caſibus, aeque procliuibus altero ſecundo altero contrario; ſit lucrum euentu proſpero impetrandum $= a$, depoſitum euentu ſiniſtro perdendum $= x$; ſumma bonorum $= \alpha$; ſic igitur erit $AB = \alpha$; $BP = a$; $PO =$ (§. 10) $b \log. \frac{\alpha + a}{\alpha}$ et quum (per §. 7.) ſit $po = PO$, erit per naturam logarithmicae $Bp = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$; denotat autem Bp depoſitum x; eſt igitur $x = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$, quae quantitas ſemper minor eſt quam lucum ſperatum a; exinde etiam deducitur, ſtulte hunc agere qui omnia ſua bona periclitatur ſpe lucri quantumuis magni, quod nemo difficulter ſibi perſuadebit, ſi recte perpenderit definitiones noſtras praemiſſas. Hinc etiam eſt, quod in vita ciuili vnanimiter videtur receptum, hominem nempe cum ratione rem dubiam tentare poſſe, quam alius non poſſit.

§. 15 Hic praeſertim conſideratu digna ſunt quae mercatoribus ſolennia ſunt in vadandis mercibus, quae mari vehuntur; id vero ſequenti explicabo exemplo. Caius Petropoli degens merces coëmit Amſtelodami, quas ſi praeſentes habeat Petro-

Petropoli, vendere poteſt pro decem millibus Rubelonibus. Curat igitur vt mari aduehantur, dubitat autem an vade vti debeat nec ne? Interim non ignorat inter centum naues eo anni tempore Amſtelodamo Petropolin proficiſcentes quinque perire tantum ſolere; nec tamen vadem reperire poteſt infra pretium octingentorum Rubelonum, quod enorme putat. Quaeritur igitur quanta Caii bona eſſe debeant praeter praedictas merces, vt cum ratione ſponſionem negligere poſſit: ſint illa $=x$; erunt eius bona vna cum ſpe mercium felicis appulſus $=\sqrt[100]{(x+10000)^{95}x^{5}}=\sqrt[20]{(x+10000)^{19}x}$, ſi ſponſione non fuerit vſus; ſi vero vſus fuerit, habebit ſummam certam $x+9200$. Aequatis autem hiſce quantitatibus fit $(x+10000)^{19}x=(x+9200)^{20}$ ſeu proxime $x=5043$. Si proin Caius plus habuerit praeter mercium ſuarum expectationem quam quinquies mille quadraginta tres Rubelones, bene faciet recuſendo ſponſionem, ſin minus accipiendo. At ſi quaeratur quanta bona ille qui pro octingentis Rubelonibus ſe ſponſorem exhibuit minimum poſſidere debeat, vt cum ratione ſponſionem in ſe ſuſcipere poſſit, ponimus eius bona $=y$; et erit $\sqrt[20]{(y+800)^{19}.(y-9200)}=y$, ſeu proxime $y=14243$, qui numerus ſine nouo calculo ex praecedente colligi etiam potuiſſet. Qui minus diues eſt inepte ſe vadem offert, quod tamen opulentior non ſine ratione facit. Hinc intelligitur quam commode huiusmodi ſponſiones introductae fue-

fuerint, cum parti vtrique magno inſeruire poſſint emolumento. Pariter ſi ſexcentis Rubelonibus Caius vadem habere poſſit, imprudenter recuſaret eum, ſi minus habeat quam 20478. R. nimisque timide agit, ſi plus quam 20478. diues merces vadatur. Ita quoque inconſiderate ageret qui minus quam 29878. R. habens ſe Caio ſponſorem offerret pro ſexcentis Rubelonibus; bene autem ſibi conſulet, ſi id faciat quum plus habet. Nemo interim, quantumuis diues rebus ſuis bene proſpiceret, ſi quingentis Rubelonibus ſponſionem in ſe ſuſciperet.

Tabula VI. Fig. 2. §. 16. Praeterea ex hac noſtra theoria alia ſequitur regula hominibus non inutilis futura; ſcilicet conſultius eſſe bona illa, quae periculo ſunt obnoxia, in plures diſtribuere partes quam omnia ſimul periclitari; hanc rurſus explicabo. Sempronius bona habet praeſentia in vniuerſum 4000. duc. et in terris exoticis inſuper merces poſſidet pro 8000. duc. quae non aliter quam mari aduehi poſſunt. Conſtat autem ex diuturno rerum vſu ex decem nauibus vnam perire. His ita ſtantibus dico Sempronii, ſi omnes 8000. duc. vni naui credat, expectationem a mercibus valere 6751. duc. qui nempe numerus eſt $\sqrt[10]{12000^{9} \cdot 4000^{1}} - 4000$. Si vero partibus aequalibus duabus nauibus merces committat, expectatio ſibi valebit $\sqrt[100]{12000^{81} \cdot 8000^{18} \cdot 4000} - 4000$, id eſt, 7033. duc. Atque ſic augebitur Sempronii expectatio, quamdiu partem vni naui

naui committendam diminuit, nec tamen vnquam excedet iſta expectatio valorem 7200. duc. Idem hoc monitum inſeruiet iis etiam, qui bona ſua litteris cambialibus credunt, aut aliis fortunae caſibus exponunt.

§. 17. Plurima certe ſunt alia noua plane eaque haud inutilia, quae nunc praeterire cogor. Maximam quidem eorum partem quiuis cordatus tacito naturae inſtinctu aliqualiter videt et ſequitur, nemo autem fortaſſe crediderit, poſſe ea tam praeciſe definiri, vt in his exemplis factum eſt. Cum igitur ita ſit vt omnia haec theoremata tam egregie conſentiant cum iis, quae natura edocti ſumus, iniquum eſſet ceu nudas veritates hypotheſibus precariis innixas, ea negligere. Confirmabitur id etiam ſequenti exemplo, quod hiſce meditationibus occaſionem dedit, et cuius hiſtoria haec eſt. Propoſuit aliquando Cel. *Nicolaus Bernoulli*, in Academia Baſilienſi Iuris vtriusque Profeſſor, Honoratiſſimus meus Patruelis, Cl. *Montmortio* quinque problemata, quae videre eſt *dans l' analyſe ſur les jeux de hazard de Mr. de Montmort* p. 402. Horum problematum vltimum huc redit, *Petrus in altum proiicit nummum, idque donec in terram delapſus notatam ſemel oſtenderit frontem: ſi vero id primo contingat iactu, tenetur Paulo dare ducatum vnum; ſi ſecundo duos; ſi tertio quatuor; ſi quarto octo, et ſic porro duplicando quouis iactu ducatorum numerum. Quaeritur ſors Pauli?*

Huius problematis mentionem fecit praefatus meus Patruelis in epiſtola, quam ad me dedit, cupiens de eo ſententiam meam ſcire. Quandoquidem calculus dictet, ſortem Pauli infinitam eſſe, nec tamen vllus ſanae mentis, vt dicit, futurus ſit, qui non libentiſſime ſpem ſuam vendiderit pro ſumma vigintiducatorum. Reuera quoties principiis communibus rem aggredimur, inuenimus ſortem Pauli infinitam, quamuis nemo eam pretio vel admodum mediocri ſibi ſit comparaturus. Quum vero noſtris principiis calculum abſoluimus, intelligimus demum huius nodi ſolutionem. Solutio problematis ad principia noſtra accommodata haec eſt.

§. 18. Infiniti ſunt caſus hic conſiderandi: horum autem pars dimidia facit vt ludus primo finiatur iactu; pars quarta vt finiatur iactu ſecundo; octaua vt tertio, decima ſexta vt quarto et ſic deinceps. Si proin numerus caſuum omnium quamuis infinitus indicetur per N; patet eſſe caſus numero $\frac{1}{2}N$, quibus Paulus lucratur vnum ducatum; $\frac{1}{4}N$ quibus duos; $\frac{1}{8}N$ quibus quatuor; $\frac{1}{16}N$ quibus octo, et ſic ſine fine. Fuerint nunc Pauli bona vniuerſa $= \alpha$, et erit ſors ipſius quaeſita $= \sqrt[N]{}(\alpha+1)^{\frac{N}{2}}.(\alpha+2)^{\frac{N}{4}}.(\alpha+4)^{\frac{N}{8}}.(\alpha+8)^{\frac{N}{16}}$. etc. $-\alpha$, ſiue $= \sqrt{(\alpha+1)}.\sqrt[4]{(\alpha+2)}.\sqrt[8]{(\alpha+4)}.\sqrt[16]{(\alpha+8)}$ etc. $-\alpha$.

§. 19. Ex hac formula ſortem Pauli indicante, ſequitur hanc creſcere creſcentibus bonis, et nunquam

quam fieri infinitam, niſi cum ſimul bona ſunt infinita. Corollaria ſpecialia haec ſunt. Si nihil habuerit Paulus, ſors eius erit $= \sqrt[2]{1}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{4}.\sqrt[16]{8}.$ etc. quae praeciſe ſic ipſi valet duos ducatos. Si decem habuerit ducatos, proxime tres valebit expectatio, et quatuor cum triente praeter propter ſi centum habuerit, ac denique ſex cum mille habuerit. Facile hinc iudicatu eſt quam immenſas quis diuitias poſſidere debeat, vt cum ratione viginti ducatis ſortem Pauli emere poſſit. Pretium autem quo emi debet, quamuis differat a ſorte quae iam poſſidetur, quia tamen admodum exigua eſt differentia, quando α eſt numerus magnus, vnum alteri aequale ſtatui poteſt: accurate autem poſito emtionis pretio $= x$, determinatur, eius valor hac aequatione $\sqrt[2]{(\alpha+1-x)}.\sqrt[4]{(\alpha+2-x)}.\sqrt[8]{(\alpha+4-x)}.\sqrt[16]{(\alpha+8-x)}$ etc. $=\alpha$, cui proxime ſatisfacit cum α eſt numerus magnus haec aequatio $x = \sqrt[2]{(\alpha+1)}.\sqrt[4]{(\alpha+2)}.\sqrt[8]{(\alpha+4)}.\sqrt[16]{(\alpha+8)}.$ etc. $-\alpha$.

Praelecta hac diſſertatione coram Societate miſi eius apographum ſupra memorato D:no Nicolao Bernoulli vt intelligerem quid de mea propoſitae ſuae difficultatis ſolutione ſentiret. Is vero in epiſtola, quam A. 1732. ad me ſcripſit, teſtatus eſt nequaquam ſibi diſplicere meam de menſura ſortium ſententiam, ſi modo quiuis ſuae ſortis aeſtimator ſit, aliter vero ſe

rem habere, ſi tertius inſtar iudicis ſecundum aequitatem et iuſtitiam vnicuique colluſorum ſortem aſſignare debeat. Id ipſe pariter in §. 2. expoſui. Communicauit deinde Vir Clar. mecum ſententiam, quam de eadem difficultate tulit Cel. Cramerus aliquot ante annis, quam diſſertationem meam conſcripſiſſem et quam vsque adeo meae conformem inueni, vt mirum ſit in tali argumento tam accurate nos conſentire potuiſſe. Igitur operae pretium erit verba apponere, quibus Cl. Cramerus ipſe ſententiam ſuam aperuit in litteris A. 1728. ad Patruelem meum datis: ita autem ille:

"Je ne ſai ſi je ne me trompe, mais je crois "tenir la reſolution du cas ſingulier, que Vous "avez propoſé à Mr. *de Montmort* dans Votre lettre "du 9. 7bre 1713. Probl. 5. pag. 402. Pour ren-"dre le cas plus ſimple je ſuppoſerai que A jette "en l'air une piece de monnoye, B ſ' engage "de lui donner 1 ecu ſi le coté de la croix tombe "le premier coup, 2 ſi ce n' eſt que le ſecond, "4 ſi c' eſt le troiſime coup, 8 ſi c' eſt le quatrieme "coup &c. Le paradoxe conſiſte en ce que le cal-"cul donne pour l'equivalent que A doit donner à B "une ſomme infinie, ce qui paroit abſurde, puisquil "n'y a perſonne de bon ſens, qui voulut donner 20. "ecus. On demande la raiſon de cette difference "entre le calcul mathematique et l' eſtime vulgaire. "Je crois qu' elle vient de ce que (*dans la theorie*) "les mathematiciens eſtimant l'argent á proportion "de ſa quantité & (*dans la practique*) les hommes de

"bon

bon ſens à proportion de l'uſage qu'ils en peuvent" faire. Ce qui rend l'eſperance mathematique in-" finie c'eſt la ſomme prodigieuſe que je peux rece-" voir, ſi le coté de la croix ne tombe que bien tard," le centieme ou le millieme coup. Or cette ſomme" ſi je raiſonne en homme ſenſé, n'eſt pas plus pour" moi, ne me fait pas plus de plaiſir, ne m'engage" pas plus à accepter le parti, que ſi elle n'etoit" que 10 ou 20 millions d'ecus. Suppoſans donc" que toute ſomme au deſſus de 10 millions ou" (pour plus de facilité) au deſſus de $2^{24} = 16677216$" d'ecus lui eſt egale, ou plutot que je ne puiſſe ja-" mais recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que" vienne le coté de la croix, et mon eſperance ſera" $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \cdots + \frac{1}{2^{25}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \times 2^{24} + \&c. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ jusqu'à 24" termes, $+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. = 12 + 1 = 13$." Ainſi moralement parlant mon eſperance eſt redui-" te à 13 ecus et mon equiualent à autant, ce qui" paroit bien plus raiſonnable que de le faire infini."

Vaga eſt hactenus iſta ſolutionis explicatio et contradictioni obnoxia; ſi enim verum ſit, non maiorem nobis videri ſummam 2^{25} quam 2^{24}, nulla omnino attentio facienda erit ad ſummam, quam acquirere poſſim poſt vigeſimum quartum iactum, quippe ante vigeſimum quintum iactum faciendum iam poſſideam $2^{24}-1$, quod non differt in hac theoria ab 2^{24}. Eodem igitur iure ſpem meam 12 ſcudos valere dici poteſt quam 13. Id vero nequaquam dico ad impugnandum Auctoris prin-

principium, quod meum quoque eſt, que les hommes de bon ſens doivent eſtimer l'argent à proportion de l'uſage qu'ils en peuvent faire, *ſeu potius ne quis inde occaſionem capiat male ſentiendi de ipſa theoria. Verum id ipſum etiam expreſſis indicat verbis Cl. Cramerus in ſequentibus, quae plane ad mentem noſtram ſunt. Sic igitur pergit*:

"On le (l'equivalent) pour ra encor trover "plus petit en faiſant quelque autre ſuppoſition de "la valeur morale de richeſſes; car celle que je viens "de faire n'eſt pas exactement juſte, puisqu'il ſera "vrai que 100. millions font plus de plaiſir que 10 "millions quoiqu'ils n'en faſſent pas 10 fois plus. "Par exemple ſi l'on vouloit ſuppoſer que la valeur "morale des biens fut comme la racine quarrée "de leurs quantités mathematiques, c'eſt à dire, "que le plaiſir que me fait 40000000. fut double "du plaiſir que me fait 10000000., àlors mon "eſperance morale feroit

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{1}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}+\tfrac{1}{8}\sqrt{4}+\tfrac{1}{16}\sqrt{8}+\text{etc.}=\frac{1}{2-\sqrt{2}},$$

"Mais cette quantité n'eſt pas l'equivalent, car "l'equivalent doit etre non pas egal a mon eſpe- "rance, mais tel que le chagrin de ſa perte ſoit "egal à l'eſperance morale du plaiſir que j'eſpere "de recevoir en gagnant. Donc l'equivalent doit "etre (par ſuppoſition) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{6-4\sqrt{2}}=2$, "9 &c., moins que 3 ce qui eſt bien mediocre "& que je crois pourtant aprocher plus de l'eſti- "me vulgaire que 13. &c.

CLASSIS

CLASSIS SECVNDA

CONTINENS

PHYSICA.

DE
GLANDVLIS RENALIBVS EVSTACHII.
AVTORE
J. G. Du Vernoi.

§. 1.

GLandulas Renales nil aliud eſſe quam ſimplices Capſulas ad vſum Renum potiſſimum fabricatas, id opinor tam earum partium ante et poſt partum contemplatione, quam circumſtantiis aliis non tam coniicere quam demonſtrare procliue eſt: Viceuerſa, cum praeconcepta glandulae idaea, quae multorum animis inhaeret, eas minus conſentire improſperasque fore eiusmodi principio ſubnixas disquiſitiones fere exiſtimandum eſſe. Quamobrem, ad illuſtrandam hancce Corporis Humani particulam, operae pretium eſſe, inſigniora phaenomena ſeu obſeruationes tam e Foetuum quam Adultorum perluſtratione eò ſpectantes, coram Academia paucis exponere, viſum eſt.

Obſ. I. Glandulas Renales in vtrouis latere Renibus conſtanter aſſidentes inuenio, quumque

Ren extrahitur, eas perpetuo ſequi vnamque cum eo maſſam conficere video, ſicuti is ſitus a Cel. *Rhuyſch. Theſ.* 1. *n. V. not.* 2. *ſeqq.* verbis deſcribitur: *Superior* inquit *pars Renis veri, ſuccenturiato non ſolum eſt contigua, verum etiam membranoſo et admirando nexu inter ſe connectuntur; ſc. Ren ſuccenturiatus excauatus eſt parte ſui inferiore, quam in cauitatem ſupremam partem Renis veri tanquam in acetabulum admittit, in modum articulationis oſſium, quae per arthrodiam fit.*

II. Exterior earumdem conformatio, frequentius quam in aliis partibus variabilis viſa eſt, idque non in diuerſis ſolummodo, ſed quoque in vno eodemque ſubiecto: Nam interdum in latere dextro, alia figura, alia magnitudine, alia ſoliditate quam in laeuo viſae ſunt.

III. In nonnullis foetibus monſtrisque, ſolidae fere viſae ſunt, absque ſinu intermedio ſenſibili.

IV. In aliis foetibus, eas humore ſanguinis aemulo, rubicundo, fluidore diſtentas ſaepenumero obſeruaui.

V. In Reſpiratione vtentibus contra, complanatas et depreſſas deprehendi.

VI. Quoad magnitudinem, cum in foetu tum in adultis Renem haud aequant.

VII. Flatu ſeu liquore iniecto, earum latera facile a ſe inuicem diduci poſſunt.

VIII.

VIII. Flatu per venam immiſſo, momento turgent ac in tumorem eleuantur.

IX. Aperta glandula, modum exploraturus quo iſta inflatio fieret, inieci mercurium: Mox in interiore ſuperficie plurimi ductus mercurio impleti ſunt, e quorum orificiis mercurius exſtillabat: Qualia orificia iam a *Warthono* obſeruata reperio.

X. Duplex ad vnamquamque Glandulam arteria cum ſimplici vena tendit: id vero animaduerſione digniſſimum eſt, ductus innumerabiles radiorum forma circa glandulam protenſos eſſe, circulumque admirabilem circa eam efformare.

XI. E pariete inferiori glandulae, vas exiguum quod arteriae magnae propago eſt, e glandula prodire viſum, in comitatu arteriae ſpermaticae, apud viros ad teſtes, apud foeminas ad ouaria deſcendere viſum eſt.

§. 2. Poſtrema obſeruatio ante reliquas ventilari meretur, quoniam ſupra allegatam glandulae ideam, certis ductibus humorem peculiarem deuehentibus ſubnixam corroborare videtur. Iſti ductus referente *Valisnerio*, a Celeb. *Valſalua* primum detecti ſunt, qui *poſtquam certos ductus in viris ad Epididymides, in mulieribus vero ad ouaria tendentes obſeruaſſet, in eam perductus eſt coniecturam eas forte ad generationem conferre.* Eiusmodi autem ductum *iuxta Obſ. XI*; e glandula prodire viſum ac in vtroque ſexu verſus organa genera-

tionis tendentem conſpicere quoque procliue erat, in cuius certe disquiſitione, ob vasculorum exilitatem et profundum glandulae ſitum, ſingulari cautione, et induſtria opus eſt. Quamobrem ea ſimilitudine inter ductum *Valſaluae* et Noſtrum apparente, ad Viri Cl. ſententiam initio accedebam, ſperans videlicet, poſtquam eo inuento praecipuae difficultates ad ductuum exiſtentiam ſpectantes ſublatae eſſent, amplam tam inuenti quam vſus nos aliquando ſeu ex ipſismet Cl. Autoris obſeruationibus ſeu propriarum disquiſitionum ope accepturos eſſe: Tum temporis enim, omnes in praefatis *Obſeruationibus* X. et XI. obuiae circumſtantiae haud ſatis perſpectae erant, quae tamen ad propoſitae disquiſitionis intelligentiam ſcitu neceſſariae et vtiliſſimae ſunt, vti ex ſequentibus perſpicuum erit: Nempe, contra meam praefatam ſententiam, ductibus a *Valſalua* deſcriptis Obſeruationes noſtras minime reſpondere intellexi, prouti eorumdem ortus et proprietates iuxta praefatas obſeruationes, ſatis euincunt: Illae enim ductum e glandula more vaſis excretorii ortum trahere, Hae contra e trunco Aortae, vt caetera vaſa ſanguinea, ductum prodire declarant. Pro iisdem ergo ductibus haberi non poſſe manifeſtum eſt. Caeterum omnes eiusmodi Obſeruationes, *Cl. Viri* inuentum minime quidem infirmare, vel eidem e directo aduerſari fateor; pro eodem tamen veri ſtudio haud diſſimulandum eſt, quod 1. crebra et longa Glandularum Renalium disquiſitione

tione ad ductuum originem inueſtigandam inſtituta, ductus e glandula oriri viſus, vera et ſimplex ſit arteriae magnae propago exiliſſima, ſub glandula incedens eique firmius agglutinata, ſed falſo pro ductu *Valſaluae* initio habita. 2. Si eius Arteriae a *Cl. Viro* nulla diſtincta et ſpecialis mentio facta ſit, vereor ne Vir caeteroquin oculatiſſimus et ſolertiſſimus, falſa imagine deceptus, in eam ſententiam perductus fuerit.

§. 3. Glandulae Renales ſeu ante ſeu poſt partum diligentius conſideratae, e laeuigato ſubluteoque cortice ſeu ſubſtantia, ſingularem adipis ſpeciem mentiente conflatae ſunt, ſubque praefato cortice ampla cauitas continetur, qua humoris fluidi et ſanguinis aemuli *Obſ.* IV. notabilem copiam includi, frequens obſeruatio eſt: Quare mutato nomine, Sinus ſeu capſulae rectius appellantur, non tam propter praefatam excauationem a glandulae notione alieniſſimam, ſed potiſſimum ob earumdem texturam et ſubſtantiam, quae ex ſingulari materia adipoſa, concreta et conformata viſa eſt.

§. 4. Nunc ad Capſularum vſum, quantum rei obſcuritas patitur, inueſtigandum me transfero. Ac primo ſententiam Clariſſimi Viri *Antonii Molinetti*, mihi plurimum placuiſſe fateor: Nam res notatu digniſſima eſt, quo tempore Organa vrinae ſecretioni dicata ſopita iacent, in foetu videlicet, capſulae tumidae et ſanguine imbutae

con-

conſpiciuntur; Vice verſa poſt partum, quando illorum actio fit perfectior, hae vacuae et depreſſae cernuntur. Caeterum ea eſſe organa quae nexum cum Renibus intimum habent, iisque ſpecialiter dicata ſunt, Nemo qui praefatas obſeruationes attentius euoluerit, aſſenſum hodie denegabit. His praemiſſis, duplici modo Renes conſiderari poſſunt. 1. Partes eorum eſſentiales, quae proprium corpus ſeu parenchyma Renis conſtituunt. 2. Partes eorumdem exteriores et proxime ambientes, quibus Renes veluti *Faſcia* inuoluti, a caeteris viſceribus diſtinguuntur, vnde ſequitur, praefatas capſulas vel prioribus vel poſterioribus proprie inſeruire Renum partibus, earumque in gratiam neceſſario fabricatas fuiſſe.

§. 5. Si in exteriores partes cogitationem et oculos intendamus, ac in fauorem earum capſulas inſeruire velimus, erit ſane ratio in admirabili congerie et fabricâ innumerabilium vaſculorum, forma radiorum circulariter glandulam ambientium in eamque tendentium (Obſ. X.) quae forte totidem vaſa reductoria ſunt, quibus e partibus exterioribus ſanguis, ne per plurima diſtincta vaſcula venae cauae infunderetur, in capſulam corriuatur, in ea permiſcetur, et mediante vena ampliore, e praefata capſula ad communem alueum defertur. Is enim, quum per anguſtias ſacculorum adipoſorum, praecipue in foetu, magna vti videtur difficultate progrediatur, eiusque ad venam

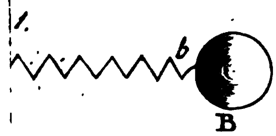
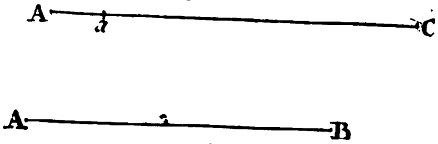


fig. 2.



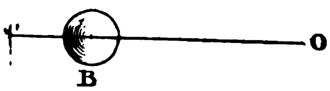


fig. 4.

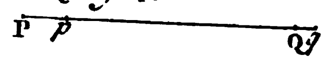


fig. 5.

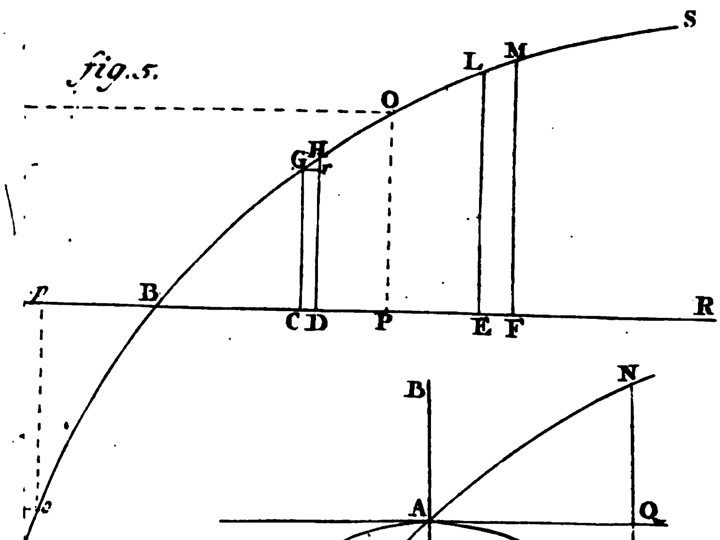
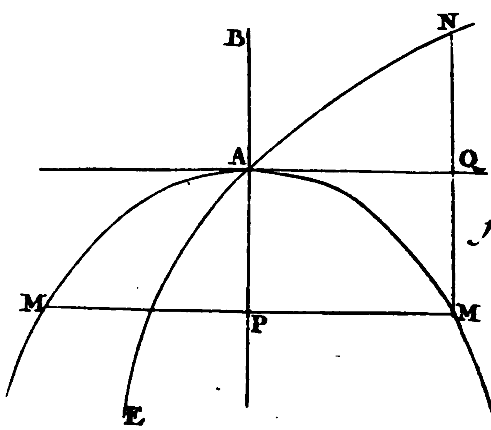


fig. 6.



Venam cauam immediata reductio tam in Foetu quam Adulto minus tuta fuiſſet, haud praeter rem eſſe videtur, vt ſecundum admirabilem Naturae legem, eiusmodi ſtructurae ratio in eum finem adeſſet, tametſi ad praefatam mechanicen magis illuſtrandam, multum meditationis et experientiae adhuc deſiderari ſciam.

§. 6. Si vice verſa eas Capſulas Renibus ipſis inſeruire contendamus, Rationes nonnullas inuenire haud difficile erit: Ac inter alias conditio Renum ante Partum praecipua viſa eſt, qua vrinae ſecretionem eo temporis ſpatio vel nullam vel exiguam fieri conſtat, haecque cauſſa eſt cur Veſica Foetus vacua inuenitur, et cur in recens natis, ſi recte memini, mictio primo et altero die haud ſuccedit. Interdum tamen fieri poteſt, vt absque ſecretione vrinae in Renibus, Veſica vrinam contineat, nempe per alias vias nobis incognitas, quibus nunc inueſtigandis non vacat; ſed illius Renum in Foetu conditionis clarum teſtimonium offert diuerſitas magna earum partium in foetu et adulto, ob quam per Renes pariter ac per Pulmonem, et caetera viſcera quae in Foetu pallida et fere exanguia cernuntur, exigua duntaxat pars ſanguinis transmitti poteſt, tametſi in vaſis maioribus copia ſanguinis incluſa ſit: In quem finem certa, et in adulto haud obuia organa Foetui conceſſa ſunt, quibus circuitus ſanguinis illaeſis viſceribus abſolui poteſt, in quorum propterea

numerum capſulas referre, naturae haud inconſonum eſt: Is enim ſanguis qui Renibus deſtinatus eſt, modo per arterias capſulares et adipoſas incedens, ſapienti naturae conſilio, in partes exteriores quaqua verſum ſeſe diffundit: Inde vero per fabricam ſupra expoſitam, in cauum capſulae infunditur, et mediante capſulari Vena ampliore aliisque venis adipoſis, ad venam cauam tutiſſime defertur.

---

* Antonii Molinetti ſententia legi poteſt Diſſert. Anat. Pathol. VI. 7.

DE FIGVRA ET SITV VESICAE VRINARIAE *

AVTORE

Joſ. Weitbrecht.

I.

Tabula VIII. CVm ante biennium ſectioni alicuius cadaueris in Noſocomio Marino incumberem, veſicamque exſciſſam inflarem: figuram eius longe aliam eſſe intelligebam, quam ex anatomico-

* Cum haec de figura Veſicae vrinariae obſeruatio ab autore facta, et vna cum icone et obiecto ipſo, menſe Iulio 1730. in Academia propoſita fuiſſet; accidit poſtmodum, vt Epiſtolae Morgagnianae Lugduni Batauorum 1728. impreſſae ad has oras afferrentur, in quibus Epiſt. I. §. 61. haec eadem obſeruatio, verbis tantum non iisdem, ab Illuſtri hoc Anatomico recenſetur. Quia vero nulla hactenus inter hos binos Autores interceſſerat communicatio; in Epiſtolis etiam nulla figura ſit adiecta; ii quoque Scriptores, qui poſt Epiſtolas

micorum deſcriptionibus atque iconibus memoria conceperam. Mutua collatio confirmauit, me non fuiſſe falſum. Sed tum temporis ex vnico obiecto nihil certi concludere licebat aut ſtabilire, pro luſu naturae, quod aiunt, rem omnem habenti.

§. 2. Poſtquam vero, ſequentibus occaſionibus oblatis in octo ſaltim cadaueribus continuo diſſectis, obſeruationem dictam denuo ad examen reuocarem: *conſtantem* illam deprehendi, et veritate rei coactus iudicaui deſcriptiones atque figuras anatomicas veſicae, publici iuris factas, quaecunque erroris cauſſa fuerit, cum natura ipſa in ſexu hominis maſculino non conuenire.

§. 3. Quodſi enim praecipuos Autores Anatomicos, *Veſalium*, *Columbum*, *Spigelium*, *Bartholinos*, *Veslingium*, *Diemerbroeckium*, *D. de Marchettis*, *J. van Horne*, *Verbeyenium*, aliosque deſcriptores potius, quam ſcriptores euoluamus: patet, quod ſecundum vnanimem conſenſum illorum, *veſica ſit vas cauum*, *membranaceum*, *oblonge rotundum*, *ſuperne latius*, *inferne anguſtius*, *ſenſimque in collum arctum terminans*, *hinc lageniforme*, *aut pyriforme*. Atque haec deſcriptio cum iconibus quoque ita conuenit, vt locus, vbi *vrachus* inſertus eſt, pyri vmbilicum, collum vero petiolum referat.

 §. 4.

ſtolas Morgagnianas compendia ediderunt, ad hanc deſcriptionem nullatenus adtenderunt; praeſens denique diſſertatio non de figura ſola ſed et de ſitu veſicae agat: ſtatutum fuit illam nihilominus in Commentarios referre. Quod ideo monetur, ne quis cenſor moleſtiam autori creet.

§. 4. Haec ſi cum obiecto ipſo conferamus, deprehendimus contra: quod Veſica *caua* quidem ſit et quadantenus rotunda, ſed ita, vt diameter a fundo ad locum inferiorem, circa collum et vreterum inſertionem, ſit *longiſſima*; ab vno latere ad aliud *breuior*; a parte anteriore ad poſteriorem, *breuiſſima*: quod pars ſuperior, quae vulgo *fundus* nuncupatur, non magis ampla ſit, ſed potius magis *acuminata* quam inferior: quod collum veſicae non ex coarctatione veſicae *ſenſim* facta oriatur, ſed pro appendicula, tamquam obturamentum in dolio ſit habenda: quod idem collum non ex parte, quae fundo oppoſita eſt, ex veſica procedat; ſed ex infimo latere anteriore, et diſtantia colli *anterior* ab vracho duplo *breuior* ſit, quam diſtantia eiusdem per poſterius latus menſurata: quod denique tantum abſit, vt veſica ex fundo *ſenſim* in collum arctum terminetur, vt potius infima ſui pars, qua inteſtinum accumbit, et cui duae veſiculae ſeminales applantantur, *planitiem* quandam, non vero rotunditatem prae ſe ferat. Quod igitur nec pyriformis nec lagenae ſimilis ſit, et conſequenter priſtinae tum deſcriptiones tum figurae merito pro falſis iudicentur.

§. 5. Haec de *figura* veſicae: iam de *ſitu*. Ille autem talis eſt. Primo quidem id omnium maxime attendendum eſt, vt de poſitione oſſium, ex quibus cauitas illa, quam peluim dicunt, componitur, certi ſimus. Etenim os Sacrum non ita applantatur ſpinae dorſi (loquor autem de homine

pedibus

pedibus recta inſiſtente) vt cum hac in linea recta et ad horizontem perpendiculari deſcendat: ſed deflectitur illud retro deorſum in linea ad horizontem obliqua. Neque minus oſſa pubis et iſchii plurimum ad interiora reclinantur, et cum oſſe ſacro tantum non parallele currunt. Hinc oſſis ſacri ſuperficies interna non tam anteriora, quam inferiora, externa autem non tam poſteriora, quam ſuperiora reſpicit: neque minus os pubis exterius magis deorſum quam antrorſum, interius vero magis ſurſum quam retrorſum ſpectat.

§. 6. Ex his ſequitur, veriſſimum quidem eſſe id, quod Veſica vrinaria in cauitate, quae peluis dicitur, contineatur: falli autem eos, qui cum *Columbo* ſtatuant: illam *ſub* oſſe pubis ſitam eſſe. Non enim certe veſica ſub oſſe pubis iatet, ſed potius euidentiſſime huic oſſi oblique ſuperincumbit.

§. 7. Vſus huius obſeruationis potiſſimum triplex eſt. Nam primo quidem *Veſalio* ſuus honos reſtituitur, qui non *apicem* veſicae, ſeu partem ſuperiorem, cui vrachus connectitur, vti perperam fecerunt Scriptores poſteriorum temporum, ſed *humilimam* veſicae corporis *ſedem*, *fundum* dixit, qui quidem fundus proprie planities illa(§.4.) eſt, qua veſica inteſtino recto incumbit. Deinde commodum haud ſpernendum redundat in illos, qui exſcindendorum lapidum cauſſa methodo Cheſeldeniana circa partem hanc verſantur, quippe operatio in hac ipſa planitie inſtituitur. Imaginaria denique ratio tollitur, quam de antiquo ſitu ana-

tomici quidam ex male intellecto *Veſalio* reddiderunt, quod ſcilicet hunc in finem a natura inſtitutus ſit, ne veſica a ſuperincumbente vtero atque inteſtinis *premeretur*; qui quidem metus per ſe vanus erat, quia nulla talis preſſura nocius ab inteſtinis quietis et vbique firmiter alligatis proficiſci poteſt; deinde vero, ex conſideratione *reſtituti* ſitus neceſſario id, quod metuebant, euenire debet; vt igitur excogitata illa ratio hoc modo plane et iuſtiſſime obliteretur.

Tabula VIII. Veſica vrinaria hominis.

a. Summitas veſicæ, vulgo fundus.
b. Latus anterius.
c. Latus ſiniſtrum.
d. Planities inferior, cui inteſtinum et rectum et
e. Veſiculae ſeminales accumbunt.
f Vaſa duo deferentia.
g. Inſertio vreteris ſiniſtri.
h. Ceruix cum principio vretrae.

DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII

DISQVISITIO ACADEMICA

G. B. Bülffingeri.

1.

A*Cademicam* molior *Disquiſitionem*, non promitto expoſitionem dogmaticam. Demonſtrationes de hoc argumento nullas poſſideo. Feci obſeruationes et condidi conjecturas. Quod Philoſophis Graecis *Academia* reliquit, adhibui, ſenſus ſcilicet, et probabilem de phaenomenis diſcurſum. Primo igitur *Viſa* accipe, deinceps *Cogitata*.

§. 2.

VISA.

§. 2. Luſi per hanc hiemem colendo radices Cichorii. A domeſtico vſu negotium adorſus, finiam in *obſeruatione Botanica.* Dolio vinario aliquot centenis pertuſo foraminibus, ita terram, tenui arena mixtam, et radices memoratas, commiſi alternis ordinibus, vt e ſingulis foraminibus promineret radicis horizontaliter poſitae vertex. Eo facto attendi phaenomenis, quae moderatus parturiebat hypocauſti calor.

§. 3. Vulgare, nec praeter expectationem fuit, folia ſic protrudi, vt ſurſum vniuerſa reflecterentur, atque omnem dolii ambitum, creſcente in dies corona, cingerent. Eam mihi ſpem fecerant viſa, quae *Dodartus* narrauit in *Memoriis Academiae Scientiarum Pariſinae ad A.* 1700. *p.* 74.

§. 4. Rarius illud exiſtimaui viſum, quod circa *ordinem* et *modum originis radicularum* animaduerti. E radicibus longioribus cultro abſcindere ſegmenta neceſſum fuit. Vidi autem poſt aliquot tempus, vbi radices quasdam extrahere dolio contigit, nouas in ſectione illa radiculas prodire; ſcilicet in ſectionis transuerſae parte ea, quae corticem a ſubſtantia ſeparat lignoſa, primo tubercula exire, atque ex illis, vbi rumperentur, radiculas. Hic *locus* erat quaſi *proprius.* Pauciſſimas vidi erumpere alibi, atque omnino ibi, vbi inſertiones erant, quas vulgo vocant.

§. 5.

§. 5. Segmenta radicum reiectanea neglexi primo, niſi quod maiora ob domeſticos vſus in corbem coniecta, ne illico marceſcerent, terra obtexi. Vidi poſt aliquod temporis interuallum etiam in his ſectionibus prodire tubercula, atque ex illis protrudi aut radiculas aut foliola.

§. 6. Ea res fecit, vt terrae meliori denuo inſerta fuerint haec ſegmenta, in qua omnino germinarunt egregie. Segmentorum variae ſpecies erant. Altera transuerſim ad radicis axem ſecta, altera ſecundum axem: maiora altera, altera minora: altera vtrinque reſecta, altera ex vno ſolum latere.

§. 7. Diſſecui *coram Societate* fruſtum radicis fortioris transuerſim et ſecundum axem in partes complures, atque omnino in quadrantes ſegmentorum diuiſi: nec omnis illa laniena impediuit, quo minus laetiſſime *ſingula* germinarent.

§. 8. Cum adeo obſequentes atque in germinando pertinaces deprehenderem radices noſtras, cogitaui, annon fallere illas liceat modo, quo deludi arbores ſolent. Notum eſt, earum aliquas, vt v. gr. tilias, ſalices etc. etſi *inuerſo ſitu* poſitas germinare, et radicem conuertere in ramos, ramos mutare in radices. Hic obſtinatiores reperi radices meas, ſed tandem tamen vincibiles.

§. 9. *Inuerſo* plantatae *ſitu* ſequentia exhibuerunt phaenomena. Quas terrae totas commiſi, ſic vt et ſuperne eadem obtegerentur, tubercula vtrinque protruſerunt, atque ex illis ſuperne radices

ces, inferne folia. Illae ſuper ſectionem repentes mox in terram reclinatae ſunt: Haec vbi ſectionem perrepſerant, ſurſum inflexa.

§. 10. Erat inter hasce radices aliqua, cuius vertex a vermibus non nihil eroſus erat: eam inuerſe poſui ſicut ceteras, ſic tamen vt ex oppoſita parte e terra emineret. Nullas haec radices e ſuperiori ſectione protruſit, ſed ex inferiori folia magno numero. Ea autem per planum ſectionis repentia intrarunt in ſpecus, vermium habitacula, et trans ipſam radicem ſurſum enixa ſunt. Miſeratus eorum ſortem ſeparaui radicem in duas partes, et denuo terrae commiſi eodem ſitu. Vidi pergere folia, et intra 13. dies ſupra terram emergere.

§. 11. Vidi et aliud ſegmentum, quod ex vtraque parte tuberculis conſpicuum erat. Id inuerſo ſitu terrae commiſi, ſic tamen, vt emineret pars, quae olim infima nunc ſumma erat. Vidi creſcere indies tubercula, ſed non diſſilire per 4. hebdomades. Donec tandem ex eorum aliquo prodiret radicula vix lineam aequans longitudine: cui etſi poſtmodum attendi, nullum accedere incrementum obſeruaui. Poſt alios 13. dies ex vno tuberculorum etiam *ſurculus* prodiit, quem incauta manus abrupit, ſed nouo foecunda mater natura ſuppleuit. Huius quidem radicis iconem ſpectatorum oculis imitabunda naturae tabula exhibet noſtra.

§. 12. In alio vidi ſimilia ſegmento; ſed tenuia admodum et paruula erant foliola, vt niſi alia ſimul ad latus excreuiſſent, negaſſem illis honorem delineationis, quo in Tab. eadem fruuntur.

§. 13. Vidi etiam ſponte oblatum, quod hactenus ſectione mediante quaeſiueram. In radice, cuius vertex putreſcere incipiebat ad altitudinem vnius pollicis, ſub illa putrida parte nouos prodire ſurculos et folia animaduerti, quae laetius pullularunt, vbi libera ab eo onere putreſcente praeſtiti.

§. 14. Aliquando cum in radice inuerſe poſita ſurculus iam pene ex terra emergeret, denuo inuerti radicem, vt ſitum naturali ſimilem nanciſceretur: vigi denuo ſeſe reflectere ſurculum et ad auras eniti. Imaginem facti videas in Tabula ſequenti.

§. 15. Vidi etiam illud, quamdiu noua germina ſub terra eniterentur, rariſſime expanſa eſſe in folia, ſed quaſi ſurculos retuliſſe: atque ipſa etiam, ſi quae erant foliola, fuiſſe, quam minime explicita, latitudinis prae altera, quae ſupra terram conſpicitur, contemtibilis.

§. 16. Vidi etiam ſurculos eiusmodi ab radice abruptos, et terrae commiſſos, nouas egiſſe radiculas, et folia protruſiſſe.

§. 17. Perterebraui et aſciam, eidemque ſic inſerui radices, vt deorſum vertex ſpectaret; alteras ſine foliis, alteras iam inſignes foliolis, vtrasque

que quoad ſitum naturalem verticaliter inuerſas. Radicem terra circumdedi, vertice, vt dixi, infra aſciam prominente. Vidi prodire folia, et alia coronam formare circa foramen ſuum, alia ſurſum reflecti per ipſum foramen, et trans terram incumbentem eniti in ſuperiores auras.

§. 18. Si quando ſegmentum radiculis ſuis inſigne ſic inuerterem, vt illae ſupra terram eminerent: vidi illas adeo non augeri aut reflecti verſus terram, vt potius marcerent breui tempore.

§. 19. Similiter, cum aliquando radices horizontaliter ita ponerem, vt media tantum parte terra tegerentur, eminentibus extra eam terminis radicum: vidi folia prodire et germinare egregie, ſed marcere fines radicum.

§. 20. Inter plurima plantarum mearum folia, eorum ſex mihi forte obuia fuerunt bifida, hoc eſt ex vno ſtylo in duas diuiſa partes, quarum ſingulae folium exhibebant. Non erat diuaricatio perfecte ſimilis, nec in eadem radice omnia, ſed in diuerſis obſeruaui, ſingula ſcil. ſuper alias radices, et mixtas foliis ordinariis. Imaginem non curaui deſcribere. Si quis eam deſiderat, fingat pennam in *Actis Naturae Curioſorum Dec. I. Ann.* 2. *Obſeru.* 80. delineatam eſſe folium, et habebit, in quo acquieſcat.

COGITATA.

§. 21. Viſis, quae dicta ſunt, iudicaui *miram creſcendi pertinaciam* eſſe his radicibus inſitam. Nouum mihi fuit, ſegmenta iſta omnia germinare, vtcunque male habita ſectionibus praeuiis. Poſtea tamen inueni, id et aliis annotatum eſſe. *Marchantium* deprehendi ſimilia narraſſe in *Memoriis Academiae Scientiarum Pariſinae. ad A.* 1709. *pag.* 82. 83. Aliqua tamen cum differentia. Verba ſunt:

On ſait par experience, qu' il y a des racines charnües, qui etant coupées par rouelles de l' epaiſſeur de trois ou quatre lignes, ou verticalement fendües en quatre parties, multiplient fort bien leurs eſpeces. Ces rouelles et ces morceaux de racines ne ſont pourtant que des parties tronquées aſſés minces, qui etant replantées produiſent a leurs circonferences quantité d' autres racines fibreuſes, dont il ſ' eleve dans la meme année des plantes, qui viennent a leur perfection, et tout a fait ſemblables à celle, d' où on les a pris.

§. 22. Equidem Vir Induſtrius protrudi vult radiculas in circumferentia ſegmentorum: id non dubito fieri in pluribus. Obſeruaui id in raphano ſilueſtri, quem lecto hoc eius monito tentamini expoſui, ſed obſeruaui ea cum limitatione, vt non niſi ex inſertionibus agi radiculas viderem, non promiſcue ex omni parte ſegmenti.

Verum

Verum in noſtris vix vnum alterumue ſuccurrit exemplum, quod ex circumferentia radices extruſerit. Cetera omnia ex confinio corticis et ſubſtantiae lignoſae, eo praeciſe ambitu, quo poſt ſectionem ſuccus prodit lacteus et amarus. Fortaſſis operae pretium fuerit, idem et in aliis experiri radicibus ex eorum genere, quae ſuccum ferunt lacteum.

§. 23. Illud neſcio an recte intulerit, quando ſuperioribus ſtatim adiungit:

D' oú il ſ' enſuit, qu' il faut, que la vapeur bumide de la terre dilate d' abord les ſemences, qui ſont dans ces petites partiès tronquées, et que la matiere, qui ſert a la formation des racines, ſ' y rencontre, pour produire les nouvelles racines, qui paroiſſent quelques jours aprés, et qui en fin donnent naiſſance a ces nouvelles plantes.

Cur vnica fit planta ſolum, ſi euoluantur ſemina plantarum futurarum ſegmento illo contentarum? Cur non integra prodit earum caterua, qualis prodit ſi plura ſemina capſae ſuae incluſa terrae committuntur? Sunt ne matura in ipſis radicibus ſemina futurarum plantarum, an ſolus immaturitatem ſupplet locus et ſuccus praeparatior?

§. 24. Annon potius ſufficit viſo huic explicando ſola ſtructurae per integram radicem homogeneitas, qua fit, vt vnumquodque ſegmentum alteri ſegmento, ipſique adeo radici toti homo-

logum ſit, et iisdem producendis effectibus aptum. An dici poteſt, plantas eiusmodi eſſe exercitus plantarum, quae pro circumſtantiis aut ſingulae euoluantur in maiores, aut vnam totalem omnes efficiant?

§. 25. Ingenioſe *Illuſtris Fontenellius*, intelligi hic de plantis, quod de anima humana dictum accepimus. *Principium vegetandi* (dic, ſi ita velis, animam vegetatiuam) eſſe *totum in tota radice*, et *totum in qualibet eius parte.* Vid. *Hiſtor. Acad. Pariſ. ad A.* 1709. *p.* 55.

§. 26. Cogitaui et *de altera plantarum* mearum *pertinacia*, qua ſurſum enitebantur ſurculi et folia, quicquid etiam impedimenti oppoſuerim. Viſa noſtris ſimilia iam ante hos triginta annos enarrauit in *Memoriis Scientiarum Pariſinis*, *Dodartus*, *ad A.* 1700. *p.* 61. *ſeqq.* quaeritur de probabili viſorum origine.

§. 27. Qui ſurſum emergere ſurculos voluerunt, *ob minorem creſcendi difficultatem*, dimidium phaenomeni ſoluere ſtuduerunt cum detrimento partis alterius. Ita enim et radices ſurſum, non deorſum, niti deberent. Nec attenderunt phaenomeno, quo grana ſeminum humefacta, ſed in aëre poſita, radices deorſum emittunt, germina ſurſum. Neque reptatum explicabunt, §. 9 et 10. indicatum: neque fugientia retro germina §. 17. excuſabunt. Sed infantia haec fuit explicationum huius phaenomeni.

§. 28.

§. 28. Meliora profatus eſt, quem ante dixi, *Dodartus*, vel ob ſolam in ſententia dicenda modeſtiam memorandus cum encomio. Diuerſam facit ſtructuram fibrarum in radicibus et ſurculis: illas tales vult, vt a vaporibus aſcendentibus in ima ſui parte abbreuientur, et in ſuperiore a calore ſolis per rarefactionem ſucci ſui et aëris contenti expandantur; has autem tales, vt a calore ſolis abbreuientur per diſſipationem ſucci ſui, et in parte inferiore per introductos qui e terra aſcendunt vapores prolongentur. Nihil opus eſt aduerſus hanc ſententiam diſputare. Monuit ipſe *Dodartus*, quae deſiderari poſſint. Negat, ſe aequieſcere huic ſolutioni: atque enumerat, quae illi deſint. Vide *loc. cit. p.* 72.

§. 29. *La Hirium* vidimus ingenioſam quaeſtioni ſolutionem applicare, quae non male conueniat viſo, quale ipſi proponitur. Dum ex ſemine germen et radix prodit, hanc craſſiori ſucco, adeoque grauiori, et fortius deorſum nitente nutrit, illud vaporibus, et ſurſum nitente fluido. Ita *punctum* quaſi aliquod *diuiſionis* concipias, ex quo radicem craſſiori, et germen ſpirituſiori fluido nutriendum incoes, quorum igitur vtrumque diuerſis vrgetur directionibus, donec in ſitum illis conatibus aptum deueniat. Vide *Memorias Acad. Scient. Pariſ. ad A.* 1708. *p.* 297. *ſeqq.* et *Hiſtor. eius Anni p.* 82.

§. 30.

§. 30. Iucunda haec ſunt, ſed fateor, me haerere ob viſa noſtra §. 9. an etiam hic vaporibus folia nutriri contigit, et radiculas craſſiori ſucco; cum illa prodirent infimo, hae ſummo ſegmenti loco? neque punctum diuiſionis hic locum habuit, circa quod tanquam motus ſui centrum in contrarias plagas niterentur aut reuoluerentur partes ſubtiliori aut craſſiori ſucco nutriendae. Fortaſſis etiam hoc vtile fuerit attendere, ſi ſurculorum directio ſurſum enitens, etiam in ipſo aëre, a niſu vaporum oritur, neceſſum erit nutriri ſurculos vaporibus, qui aërem leuitate ſuperent ſpecifica; namque ii ſoli ſurſum tendunt in aëre. Id autem an facile admiſeris, neſcio.

§. 31. Quicquid aliis videatur, mihi *Aſtruciana* prae caeteris expoſitio placet. Vult 1. ſuccum nutritium ferri in fiſtulis ſecundum longitudinem plantae, extenſis: 2. fiſtulas invicem communicare vel immediate, vel ope canaliculorum horizontalium ex medulla egredientium, more radiorum circuli: 3. in tubis ad horizontem parallelis vel inclinatis fluida grauitare in parietes fiſtularum inferiores, et nequaquam in ſuperiores: igitur 4. ſuccum nutritium proprio pondere cadere in fiſtulas plantae inferiores, ibidemque colligi in copia maiori, quam in ſuperioribus: vnde 5. tubuli iſti amplius extendantur, et pori fiant apertiores: 6. ſuccum in eos maiori copia penetrare, et inferiorem plantae partem creſcere fortius. Ex

eo

eo 7. fieri, vt, dum inferior pars magis quam ſuperior augetur, extremitas illius ſurſum recurnetur, tamdiu 8. donec in eum planta ſitum deueniat, quo vtraque pars aequaliter nutriatur, hoc eſt, in verticalem. 9. Fieri autem hoc in partibus plantarum flexibilibus, hoc eſt, in extremitatibus plantarum adhuc mollibus. Quin imo 10. in ipſis ſeminibus, quae adeo vtcunque proiecta ſurſum germinent. 11. Ex aduerſo radices nutriri ab extrinſeco humore: igitur 12. ſuperiorem fortius creſcere partem, quam inferiorem, quia 13. ceteris, licet omnibus, paribus, humor ſua grauitate iuuet ingreſſum in partes radicis ſuperiores, in inferiores impediat.

§. 32. Habet haec expoſitio characterem, qui rebus competit naturalibus. *Simplex* eſt, et *minimum laboris* naturae imponit. *Demus* ſuccum nutritium ferri in fiſtulis communicantibus: *cetera* ſe omnia *bene* habebunt, *niſi* quod emendari debeat, quod *numero* 3. dicitur. In canaliculis ad horizontem inclinatis etiam ſuperior paries premitur a fluido ſtagnante altiori. In horizontalibus, qui communicant cum altioribus tubulis res eadem obtinet. Sed inferiores tamen tubuli, et inferiores tubulorum parietes fortius premuntur, quam tubi ſuperiores, vel eorundem tubulorum parietes ſuperiores. *Sufficit* id ſcopo Viri. *Nec obeſt*, differentiam eſſe exiguam: eſt enim continua; eſt contra obiectum molle; nec illi effectus imputatur citus, ſed omnino lenis et lentus.

§. 33. Sunt etiam *phaenomena* mihi, quae *praecipuas* hypotheſeos et ratiocinii *partes confirment.* Inferiores fortius nutriri fibras egregie patuit mihi in raphano, quem *Excellentiſſimus Comes de* MUNICH Academiae ſpectandum transmiſit. Eius haec facies erat: ſciſſus per medium tres exhibuit cauitates communicantes; quibus externe totidem eminentiae reſpondebant; in ſuperioribus duobus quae collaterales erant, et cum inferiore, per longitudinem raphani excurrente, communicabant, folia varie inflexa conſpiciebantur, quorum vnum deorſum inflexum per totam raphani longitudinem excurrebat, et vbi ad finem cauitatis peruenerat, non nihil reflectebatur ſurſum: folium bene nutritum erat, et forte, ſed coloris ex flauo albibicantis, quod tamen poſtea aëri expoſitum hilariter euiruit. Folium illud primarium in ſitu raphani, quamdiu terrae infixus erat, directe deorſum ibat, circa latus cauitatis: ſed poſtea vbi terrae humidae a me ſuper imponebatur raphanus in ſitu horizontali, erexit ſeſe folium, egitque radiculas, et noua protruſit folia. Ea quidem omnia huc proprie non pertinent: quare etiam a prolixiori harum et aliarum circumſtantiarum deſcriptione me abſtineo. *Duo* autem ſunt, quae omnino lucem dictis foenerantur noſtris. *Alterum*, quod folia, quae varie in cauitatibus ſuperioribus reflexa erant, omnia rugas oſtenderent in latere infimo, quoties deorſum aut horizontaliter creſcere debuerunt; nullas autem haberent in ſuperiore latere,

quoties

quoties eadem reflexa ſurſum pergerent: *Alterum*, quod nullas ſuperne rugas haberent laciniae folii primarii ſurſum reflexae, etſi contra deſtinationem ſibi ordinariam dirigerentur; imo nullas etiam acquirerent, cum inuerſo iterum ſitu raphani in directionem naturalem denuo reflecterentur. Iſta quidem omnino oſtendunt, in ea plantae parte, quae nutritur ab intrinſeco, *inferiores fortius* creſcere fibras, quam ſuperiores; plane, vt requiritur.

§. 34. Sed radices ab extrinſeco nutriri, creſcere, et conſeruari docent phaenomena noſtra, ſuperius expoſita §. 18. et 19. Itaque mirum non eſt, contrariam illarum ſortem eſſe, atque omnino talem, qualem *Vir Inſignis* poſtulat §. 31. No. 11. ſeqq.

§. 35. Iſta quidem de ſecunda hac plantarum noſtrarum pertinacia. Supereſt *tertium* quid, quod neſcio an ſimulationem interpretari debeam, an ſerium naturae phaenomenon. Obtinui tandem, vt ex inferiori radicis parte ſurſum verſa ſurculus prodiret: ſed non niſi poſt magnum tuberculi incrementum. Quid dicam? An hic in contrarium ſuccus iuit protrudens ſurculum, vbi radix debebat prodire? Vix videtur, quoniam et inferius prodiere ſurculi maiore copia. An dici debet, tuberculum quaſi plantam exhibere integram, e cuius ſummo ſurculus prodiit, cum ex imo radix

prodire deficiente nutrimento externo non poſſet?

§. 36. Optaſſem, vt dicere liceret, quod ſub terra prodeat compactum, radicis ſpecie, idem in aëre expanſum prodire ſurculi et foliorum ſpecie. Fuiſſet hoc affine, explicationi arborum inuerſe poſitarum §. 8. et commodum phaenomeno §. 12. Non id vero licuit, poſtquam ab extrinſeco radices nutriri vidimus §. 34.

§. 37. Igitur in eo hactenus manere placet, eſſe vbique, quod ſurculis, et eſſe quod radicibus formandis conueniat; ſed alteris euoluendis nutrimentum deberi internum, alteris externum.

§. 38. Illud *curioſulis* dictum eſto: *Occurrere in radicibus noſtris, quod in magnete.* Si magnetem ſeces transuerſe ad axem polorum ſuorum, ſuperficies antea contiguae virtutes nanciſcuntur contrarias, altera auſtrales, boreales altera. Ita in radicibus noſtris, ſi transuerſim ſecentur, ſuperficies contiguae contrarias acquirunt ſortes, altera radices protrudit, altera ſurculos et folia. Id, ſi velis, portenti loco habe. Si minus, finge directionem ſucci interni, et fiſtularum ſtructuram efficere, vt ille nonniſi ſecundum vnam directionem nutriat, adeoque in illam partem creſcere debeant, quae ab intrinſeco nutriuntur.

Aër

AER INTESTINORVM TAM SVB EXTIMA QVAM INTIMA TVNICA INCLVSVS

OBSERVATIONES ANATOMICAE.

A

J. G. D.

Art. 1.

EIusmodi Tumorum inteſtinalium, an vllum alibi exemplum literis conſignatum ſit nec ne, Problema eſto; nempe, ſuper inteſtini exteriore facie, per inſignem tractum, plurima ſpatia, in quibus in tumorem extima inteſtini tunica veſicae inſtar attollitur, conſpicua ſunt. Eiusmodi autem eleuationum quaedam latiores, quaedam contractiores, plus minus eminentes, quaedam inſtar annuli totum ambitum inteſtini complectentes iisque locis craſſitiem notabilem conciliantes, omnes colore inteſtinorum proprio praeditae conſpiciuntur. Caeterum, extus et ſuperficie tenus conſideratae diaphana et candida materia turgere, comprimentique digito crepitantium veſicularum ſenſum imprimere, intus vero poſt inciſionem cellulas candidas, fauum mellis aemulantes, ſiccas ac humore vacuas referre viſae ſunt.

2. Inuerſo inteſtino, ſuper interiore facie, et quod animaduerſione magis dignum eſt è dire-

cto, eiusmodi tumores ſeu eleuationes pari numero forma et amplitudine, qua in exteriore ſuperficie, conſpicuae erant; Earum enim nonnullae contractiores, aliae circulum efformantes et ex earum numero nonnullae adeō protuberantes erant, vt fere cauum canalis obturarent. Caeterum, etſi areae glandulosae ſpeciem mentiantur, re penitius perſpecta cum prioribus ad amuſſim conuenire obſeruaui. Iis qui Anatomicis administrationibus adſuere, phaenomenon haud abſimile obſeruare licuit, quod eorum Tumorum ſeu eleuationum elegantem imaginem oculis ſiſtit, quando videlicet parte aliqua membranoſo-celluloſa vel ex inſtituto vel caſu praeter animi ſententiam inſufflatâ, ea per aëris impulſionem collectionemque in tumorem artificialem praefatis tumoribus ſimillimum eleuatur.

3. Indicem *operum Rhuyſchianorum* euoluenti, tumor inteſtinorum flatulentus in *Catalogo Rariorum p.* 141. ſiſtitur, quo nomine an eiusmodi eleuationes quales noſtrae ſunt, *Cl. Autor* velit nec ne, id ex praefato catalogo, ſi ad manus eſſet, exponere procliue foret.

4. In Hiſtoriâ *Acad. Pariſ.* 1703. Tumorum ieiuni et ilei cauum obſidentium obſtruentiumque in Foemina cruciatu ventris aſſiduo, ſex menſium ante vitae finem ſpatio exagitata, commemoratio facta eſt, quâ a *Cl. Littrio* cauſſa ſimul indicatur, vide-

videlicet, Glandularum inteſtinalium, mole, figura te conſiſtentia vitiatarum tumefactio: cuiusmodi fateor tumoris generatio inter rariſſima phaenomena numeranda eſt, quoniam conceptu arduum eſt, glandulas minutiſſimas viſum effugientes quales inteſtino conceſſae ſunt, in eam extendi molem magnitudinemque poſſe, vt cauum inteſtinale totum fere impleant, et quod magis admirandum eſt, vita ſuperſtite, et doloris in vna tantummodo ventris ſede ſenſu, tametſi totam ieiuni ileique tractum praefati tumores occupauerint.

5. Ingens ergo et eſſentiale diſcrimen inter iſtos et Petropoli obſeruatos tumores eorumque generationem, perſpicere procliue eſt. Glandularum enim loco, tam in extima (in qua certe nullas dari glandulas conſtat) quam interiore inteſtini facie, veſiculoſo-racemoſa textura, e congerie exiguarum et pellucidarum veſicularum efformata, et (quod a glandularum inteſtinalium indole quoque alienum eſt,) annuli vel armillae inſtar diffuſa, tunicasque inteſtini absque alia eiusdem immutatione ſolummodo diſſocians diſtendensque, ac tandem geminum tumorem e regione ſibi oppoſitum excitans, intuentibus conſpicua eſt, propter quam adeo indolem conformitatemque ſitûs cum duplici corpore celluloſo inteſtinis proprio, * rationem iſtorum phaenomenorum in praefata ſubſtantia ſitam eſſe perſpicuum eſt: Cuiusmodi vitio

* Vid. Comment. Acad. Imper. Tom. IV.

tio corpus ſubcutaneum adipoſo celluloſum frequenter obnoxium eſſe ſolet, quando aut ſeroſa aut aërea aut alia materia eius veſiculas diſtendente, in variis cutis regionibus, vel *Emphyſematis*, vel *Tympanitidis*, vel *Anaſarcae* ſpecie, ſuperficies corporis exterior veſicae inſtar intumeſcit.

6. Caeterum in iſtiusmodi partibus haud aeque mirum id videri debet ac in inteſtinis, quorum videlicet textura ſolidior parrticularumque nexus et contactus intimior praefatam tunicarum diuulſionem ſeparationemue perarduam nedum impoſſibilem reddere videtur: Imo diligentior rei conſideratio effecit, vt de originis et formationis in inteſtinis ratione dubitem, an eiusdem generis intumeſcentiarum communi origini ea reſpondeat? vel contra, (quod mihi veroſimillimum videtur) peculiari cauſſae propriaeque diſpoſitioni inteſtinorum, quâ videlicet materia aërea inteſtinorum cauum permeans, eorumdem tunicas peruadendi facultatem acquirit.

7. Vt irruptio aëris locum habere queat, ſufficit ſi per admixtionem actionemque particularum e praua alimentorum potulentorumque qualitate reſultantium, is aër ad maiorem ſubtilitatis tenuitatisque gradum diſpoſitionemque poris minutiſſimis peruadendis aptam perducatur, inque cellulis ac flexibus inteſtinorum, ad membranam ſeu tunicam interiorem applicetur, qua diſpoſitione con-

continuata, haud difficile erit, vt in pluribus locis, per raram et ſpongioſam tunicae interioris tunicam aëri caeteroquin imperuiam, particulae aëris magis liberae et magis preſſae in contiguam texturam veſicularem paulatim irrumpentes eam extendant ſpeciemque intumeſcentiae intus producant: quarum reditu ſeu regreſſu in cauum inteſtini impedito, etiam procliue erit ad alterum exteriorem contextum celluloſum, data huius cum interiori communicatione, tranſitum moliri ac ita efficere, vt in extima ſuperficie conſimilis ac in interiori facie tumor oriatur.

8. Pari, ſed paulo diuerſa ratione, aëre externo nullam mutationem alterationemue, vt in praecedente hypotheſi, ſubeunte, aëris irruptionem explicare licet, ſi videlicet, a praua alimentorum potulentorumque indole, tunicae interioris quam aëri imperuiam diximus, diſpoſitio natiua ſic immutetur, vt vel defectu vel liquefactione materiae illinientis, vel ob aliam quamcunque cauſſam, eius reſiſtentia contra nitenti aëri debilior ſit; ob quem niſum, pororum amplitudine incrementum paulatim aſſumente, aër introrſum penetrans, ſimilia iis quae commemorauimus phaenomena tam in contiguo ſeu interiori, quam exteriori contextu celluloſo producere poteſt.

9. Aliam adhuc rationem eorum phaenomenorum excogitare fas eſt, ſi in quibusdam locis, tunica

 inte-

inteſtinorum interior exteriorque, a frigoris violentia vel ab aliis cauſſis ſic conſtipata fuerit, vt halituoſorum effluuiorum perſpiratio fieri nequeat: nam hac materia intra cellulas collecta eiusmodi emphyſemata generari poſſe veroſimile eſt. Caeterum, quia tam ad cauſſarum quam ſymptomatum concomitantium veram exactamque hiſtoriam elaborandam, *Mortuorum contemplatio* quae in partis affectae ſimplicem notionem nos ducit ſola haud ſufficit, absque ſingulorum olim vsque ad vitae finem ſeſe excipientium phaenomenorum obſeruatione, pergratum fateor fuiſſet noſſe, qualia eiusmodi Tumoribus ſociata fuerint ſymptomata grauia ne, vti ſuſpicor, truculenta, varia, anomala? an contra exigua, parum moleſta vitaeque minime aduerſa? ſed vndenam et a quo notitiam quam hic deſidero, obtinere poſſumus?

DE QVADRVPEDE VOLATILI RVSSIAE OBSERVATIONES.

A

J. G. D.

PRaeter *Veſpertilionem*, quem Hiſtoriae animantium ſcriptores animal cuiusdam inter murem et auem ſpeciei, proptereaque *Murem alatum* vel animal *volucre biforme*, quod cum nullo animan-

mante nobis noto ſimilitudinem habet, vocant, nulla inter Europaea Animalia eiusmodi ſpecies anomala obſeruata fuit, quae a ſua communi indole eatenus diſcedit, vt ſimilitudinem ambiguam videlicet auis et quadrupedis ſimul induat, vitaeque actiones vtrique proprias exerceat: talia enim, vt caprae, leones, equi, boues alati pro chimaera ſeu pro non entibus in Poëtarum aut Pictorum cerebro effictis aut pro monſtris apud excultas nationes haberi ſolent, de quibus vid. *Fort. Licetus Ambroſ. Paraeus.* An eiusmodi Animantia praeter *Veſpertilionem*, ob aëris aduerſam qualitatem in ea quam inhabitamus orbis terrarum parte haud dentur, id alii viderint. In caeteris autem terrae partibus, in Africa videlicet, in Aſia et America; praeter ingentem copiam Animalium rariſſimorum quae inſtitutis terra et mari peregrinationibus conquiſita et perluſtrata fuere, eiusmodi ſpecies anomalas quae contra ſui generis indolem volatiles ſunt, tam inter aquatica quam terreſtria animalia inueniri, ſpectabiles et digniſſimi Viri teſtantur, Vid. *Raii Synopſ. Anim. Du Hamel Hiſt. Acad. Pariſ. Ephemerid. N. C. R. P. Souciet in Obſ. Aſtron. Geograph. Phyſicis.* Vid. etiam Peregrinationes Nauigationesque in nouam Hiſpaniam, Virginiam aliasque Americae Regiones, ab Hiſpanis, Luſitanis, Batauis, Gallis, Anglisque olim ſusceptae, in quibus *Piſces volantes*, *Lacertae alatae*, *Feles alatae* inque eorum numero *Sciuri* quoque *alati* inueniuntur,

Certe ob hanc ipſam Animalium diuerſiſſimorum perluſtrationem, peregrinationum nauigationumque incredibilis vtilitas, neceſſitasque intelligitur; qua praeter communia et familiaria ad eſcam vſitata et pauca alia apud nos obuia animalia, reliqua ſub alio ſole viuentia maxima et minima, totumque adeo mundum animalem perluſtrare, Autorisque et Opificis immenſas opes, maieſtatem, ſapientiam intelligentiamque in creatione et conſeruatione eorumdem conſpicuam ſuſpicere fas eſt. Haud tamen in externarum rerum nuda contemplatione quales ſunt ortus, conformatio, varietas, indoles, ingenium, vitae genus et infinitae aliae admirandae proprietates, quae inſignem animi delectationem voluptatemque in omni homine honeſto excitant, verum praecipue in ſingularum partium internarum fabricae actionumque, in iisque excellentiae, magnitudinis, ſubtilitatis, prouidentiae et intellectus, quorum conſpectu longe maiori voluptate et admiratione animus perfunditur, contemplatione et cogitatione, vera Animalium cognitio et vtilitas verſatur.

Etſi vero initio eiusmodi animantia anomala apud Europaeos dari negauerim, notatu tamen dignum eſt, quandam ſpeciem pulcerrimam *Moſcuae* primum, deinde *Petropoli* in ſyluis et montibus haud infrequentem innotuiſſe, quae *Sciuro Americanorum volanti Raii* et *R. P. Souciet* proxime accedit et ab incolis quoque *ſciurus volatilis* appellatur, ſub quo titu-

titulo ſub finem ſuperioris anni, eiusmodi animalculum, cuius deſcriptionem etſi haud ſufficienti numero obſeruationum ſubnixam hic ſubiicio, Academiae oblatum fuit, quod etſi Ruſſiae aeque ac Americae commune ac perpetuum, minus mirandum eſt, quod ignotum fuerit; ſi ad alia animum attendamus. Caeterum (vt notionem aliquam generalem praemittam) totius corporis, deinde capitis, auricularum, roſtri, labii ſuperioris, dentiumque tam figura quam numero, pedum, vnguium, caudae conformatione, tandem villoſa cute cum *ſciurorum* ſpecie omnino conuenire, mole autem ei cedere, et pilorum caneſcentium et nigricantium colore differre viſum eſt. Num ea corporis conſtitutione praedita Animantia absque aliis adminiculis aëri ſeſe committere poſſint, iis, qui ratione pollent diiudicandum relinquo: Quadrupedis reverâ potius quam volatilis imaginem ea denotare fateor.

Ad eam in terreſtri et quadrupede Animali extraordinariam proprietatem, quae artem infiniti intellectus plenam inuoluit, plures diuerſasque actiones ac varia inſtrumenta elegantiſſimo et ſummo artificio elaborata et diſpoſita adeoque ab incomparabili Opifice excogitata deſiderari exiſtimo, quemadmodum obſeruationum quarundam ſelectiorum expoſitione nemo non intelligere poteſt.

Pellis igitur, quâ in eo Animantium genere totum corpus ſtricte tegitur, iuſto laxior et amplior, ad vtrumque latus ventris ſeſe prolongans et ad extremitatem pedis vsque ad palmarem fere latitudinem elongata ſingularem illam Alae proprietatem mentitur, qua in huiusce animalculi admirationem pertrahimur, et ob quam ad volatilia Animantia Anomala ab incolis, qui propriis oculis praefatum volandi actum contemplati ſunt, refertur, narrantes videlicet, ei quando vult procliue eſſe, earum appendicum ſubſidio corpus in altum efferre, et ſic ab vna arbore verſus alteram euolare.

Primum illud inſtrumentum obuium expanſio eſt, leniſſima tenuiſſimaque propriae cutis, ſupra et infra villoſa, quae cutis dorſum, ventrem cruraque anteriora et poſteriora inuoluentis prolongatio eſt, ex duabus conflata laminis, totumque adeo replens ſpatium laterale, quod cruri anteriori et poſteriori, quibus ceu fulcris alligata eſt, interiacet. Id vero obſeruandum eſt, eam latitudinem prope crus poſterius ad duorum vsque pollicum latitudinem reduci: nam ea ab extremo cruris anterioris, oblique introrſum verſus crus poſterius tendens, ſinuoſumque marginem efficiens in eo itinere paulatim de ſua latitudine amittit, quare earum expanſionum in vtroque latere figura ad triangulum fere accedit. Caeterum earum ſubſtan-

ſtantia, vti iam dictum eſt, cutanea, ex duabus aequalibus planisque laminis ſibi inuicem agglutinatis conflata, ac inſtar ſubtiliſſimae cuticulae tenuiſſima leuiſſimaque et pellucida: Pili vero, vt in reliqua cute, ſubtiliſſimi ſerici ad inſtar molles et cinereo nigricante colore viſi ſunt. Tantum de earum expanſionum *aliformium* externa facie.

Secundi generis inſtrumenta praefatarum laminarum interſtitio incluſa, per laminarum diſiunctionem caute aggreſſam conſpectui oblata fuere. Ambae laminae ita ſeparatae, ſimplices pelliculas omnium tenuiſſimas et politiſſimas abſque pinguedinis et ſanguinis vllo veſtigio manifeſto referre viſae ſunt. In ea itaque duplicatura duo obſeruanda ſunt: 1. congeries quaedam fibrarum ſubtilium albarum et ſpongioſarum, e dorſi vertice deſcendentium, et curuis veluti lineis excurrentium, laminisque praefatis adhaerentium, breui autem itinere confecto viſum rurſus effugientium, quibus ad extenſionem aeque ac contractionem paratis, laminas diduci et contrahi poſſe clare intellexi. 2. Poſtquam laminae a ſe inuicem in totum vsque ad marginem exteriorem diuaricatae ſunt, alia fibrarum ſeries quae a praecedenti tam ſitu quam directione diuerſa eſt, videlicet faſciculus tenuiſſimus teres, longus, in extrema ora exteriore praefatae duplicaturae incluſus cernitur, cuius altera extremitas longae apophyſi acutae quae ad latus carpi promi-

prominet connata, altera vero extremo cruris poſterioris alligata eſt.

Tertii generis inſtrumenta, partium hactenus deſcriptarum proprie fulcra et gubernacula ſunt, videlicet 1. vniuerſa oſſium compages, 2. oſſicula quaedam ſingularia praefatarum appendicum aliformium actionem immediate ſpectantia. De oſſibus in genere obſeruandum eſt, integram compagem, qua vltra centum oſſa continentur, exiguae aviculae ſceleton pondere vix aequare, adeo ſubtilitate ſoliditateque eximia, eius Animalculi vere quadrupedis oſſa, auicularum oſſibus affinia ſunt. Sed artuum anteriorum diligentiorem perluſtrationem inſtituti ratio praecipue poſtulat, quoniam praefata membra auium et quadrupedum aemula, non ſolum ad greſſum inceſſumque, ſed ad apprehenſionem quoque, admirabilem aptitudinem nacta ſunt. In eorum compage ſequentia oſſa obſeruare fas eſt. 1. Os Clauiculae. 2. Os Scapulae. 3. Os humeri. 4. et 5. Oſſa vlnae et radii. 6. Oſſicula carpi, pollicis et quaternorum digitorum. 7. tria oſſicula ſupernumeraria.

Os clauiculae, oſſiculum 8. lineas longum, obliquo ſitu inter ſternum et ſcapulam collocatum, illi ligamenti tenuiſſimi, teretis, laxioris, huic duorum ligamentorum ope, vno craſſiore latiuſculo cotulae ad inſtar excauato ad acromii latus, altero tenuiſſimo, tereti ad principium

cipium proceſſus Coracoidis annexum eſt. Facie collum reſpiciente leuiter concauum, oppoſita vero parum conuexum, vtrinque vero complanatum, cuius extremum alterum quod ſcapulam reſpicit latius, et aduncum euadit, alterum contractius et craſſius: medium vero lineae latitudinem aequat, caeterum ſoliditatis eximiae particeps.

Os Scapulae durum, pellucidum tenuiſſimumque, coſta inferiore clauiculae longitudinem aequans, latitudinem vero 4. linearum haud excedens, forma a reliquis animantibus in eo diſcrepat, quod planumſuperiusconuexum deorſumque verſus oppoſitam ſuperficiem incuruatum, planum inferius contra ſurſum extrorſum verſus ſuperficiem externam inflexum ſit cum margine ſulcato: propterea duplex conuexitas ſeu teſtudinea ſuperficies videlicet vna exterior iuxta longitudinem coſtae ſuperioris, altera inferior iuxta coſtae inferioris longitudinem efformatur. 2. duplex ſpina, vna naturalem ſitum obtinens, altera inuerſa in oppoſita facie dorſum reſpiciente conſpicua eſt: diceres duarum ſcapularum lateraliter ſibi iunctarum compagem iunctionemque eſſe, quoniam vtrinque duae cauitates infra et ſupraſpinatae efformantur. Spina inuerſa dicta, a baſi incipiens, ad lineae altitudinem excreſcens et proceſſu acromio carens prope ceruicem euaneſcit. Altera vero ſitum naturalem obtinens non ſolum ad 2. linearum altitudinem excreſcit, ſed proceſſu gaudet

inſigni ſupra caput oſſis humeri eminente et admodum amplo, ad quadranguli figuram fere accedente; coſtae denique ſuperioris extremitas ceruici proxima in inſignem craſſum et tricornem proceſſum (vulgo proceſſus coracoides) terminatur. Duo ſuperiora cornicula alterum longius alterum breuius, parum incuruata ſulcoque intermedio disiuncta, admirabili ratione oſſis humeri cum ſcapulae ceruice cotyloide, iunctioni inſeruiunt: Tertium vero corniculum, mediante ligamento, iunctionem cum clauicula prope eius extremum efformat.

Os humeri humano perquam ſimillimum eſt, niſi quod protuberantiae capiti laterales proportionem excedere viſae ſint.

Oſſa vlnae et radii ad eundem modum quo in *vulgari Sciuro*, *Lepore*, *Vulpe*, *Echino* etc. conformata et diſpoſita ſunt, videlicet ſitu minime plano ſeu a latere, ſed vnum ſuper alterum: Os radii anteriorem, os vero vlnae poſteriorem locum tenens 2. Eadem oſſicula, more aliorum animantium, ab vno extremo ad alterum a ſe inuicem haud dehiscunt: Os enim vlnae, circa medium oſſis radii haerens, ac eousque tantum dehiſcens, ſubito ei adnaſcitur, et ſpinae piſcium ſimilis cum eo concreſcit et euaneſcit: Os diceres bifidum, circa medium in 2. portiones inaequales diuiſum, quarum altera tenuior os vlnae, craſſior os radii ordine inuerſo conſtituit: Nam quod

ſum-

ma admiratione dignum eſt, eorum oſſiculorum ordo ſeu conſtitutio ordinaria ſic immutata viſa eſt, vt os vlnae oſſis radii ſpeciem, os contra radii ſpeciem oſſis vlnae referat: os enim breuius et ſubtilius quod 12. lineas longum, ſpinaeque piſcium tenuioris intus ſulcatae aemulum eſt, ſuperiore ſuo extremo duplici roſtro ſinuque ſigmoideo ad oſſis humeri trochlearem proceſſum accommodato, praeditum eſt. Os contra longius et craſſius 16. linearum longitudinem aequans, radiumque mentiens ſuperiore extremo, quod teres et excauatum eſt, oſſis humeri inferius extremum excipit, ob quam rationem potior pars trochlearis proceſſus, radio inarticulata eſt, poſtica tantum eius parte in ſinum recepta ſigmoideum oſſis vlnae, cuius adeo alterum roſtrum, quod inferius eſt; propter dictam radii oppoſitionem, quando cubitus flectitur, ſinum oſſis humeri anteriorem attingere minime poteſt, alterum contra roſtrum more aliorum animantium ſinum poſteriorem absque vllo impedimento ingreditur. In eiusdem oſſis radii extremo inferiore id pariter animaduerſione dignum eſt, quod praefata extremitas ad oſſium carpi receptionem ſola inſeruiat.

Tam oſſicula carpi plurima, quam metacarpi pollicis, digitorum vnguiumque, ſtructura cum praefatis animantibus conuenire viſa ſunt.

Ad latus externum carpi oſſiculum prominet, cornu acutum referens, oſſeae tamen et ſolidiſſimae ſubſtantiae, leuiter inflexum, diametro in principio 3. lin. et in fine dimidiam, longitudine vero 16. lineas aequante, cuius baſis ſeu principium bicorne, hoc eſt duplici roſtro cum ſinu inter medio conſtans, ei quod diximus lateri externo carpi annexum eſt, caeterum ab omni alio nexu liberum, praefatis expanſionibus aliformibus interiacens, ſuo tantummodo apice ad faſciculi fibroſi ſupra deſcripti extremum alligatum eſt. In eiusdem oſſiculi gratiam, duo alia in vola oſſicula minima ad carpum pertinentia et extra ordinem ſita exſtant, alterum transuerſim poſitum ac pollice firmatum, alterum radii extremo annexum et oblique cum praecedenti oſſiculo copulatum, quae ambo ad angulum acutum inuicem coëuntia a ſinu oſſiculi excepta, roſtrisque eiusdem firmata, eam articulationem admirabilem efficiunt, qua praefatum oſſiculum variis motibus edendis aptum et idoneum redditur.

Ea, quae hactenus breuiter expoſita ſunt, videlicet incredibilem leuitatem animalculi fere totum quantum membranacei, expanſionumque cutanearum tenuiſſimarum leuiſſimarumque oſſiumque ad eas ſpectantium ſingularem fabricam connexionemque attentius conſideranti, ratio, opinor, qua eiusmodi animalculum in altum efferri ſuſpenſoque in aëre corpore aliquamdiu certum vo-

volandi actum exercere valet, minus obſcura cenſeri debet, quamuis inter eam et volucrum conſtitutionem, magnam diſſimilitudinem intercedere fatendum ſit; cum Veſpertilione contra, ob analoga organa, ingentem conformitatem animaduertere fas eſt. Quare per latas in vtroque ventris latere conſpicuas telas ſumma flexilitate et tenuitate praeditas eumque in modum diſpoſitas, vt quemadmodum alae auium ad pectus accommodantur retrahunturque, rurſusque a pectore diducuntur et dilatantur, eae pariter ad contractionem aeque ac dilatationem procliues ſint, per telas inquam praememoratas futuram eſſe corpuſculi animalis in aëre ſuſpenſionem progreſſionemq; cenſendum eſt, quando per crurum ſubitam et velocem extenſionem, qualis in ſaltu et curſu accidit, eodem momento abductio et complanatio earumdem oritur, qua prior easdem contrahens et complicans, videlicet actio vis fibrarum e dorſo ad telas tendentium ſuperatur; nam incedente aut quieſcente animalculo, per earum fibrarum actionem telae ſurſum reuocatae ad latus ventris ſeſe accommodant, ne pendulis aut fluctuantibus illis vel ipſae laederentur, vel inceſſus difficultas augeretur; Eodem tempore, quo extenſis per ſaltum cruribus corpus in altum eleuatur, telaeque iis quaſi fulcris annexae etiam complanatae praefatam corporis ſuſpenſionem adiuuant, oſſiculum ſeu cornu longum et acutum ſupra deſcriptum ad externum manus latus promittens, eidem operationi apprime inſeruit; Nam

quum articulatione admodum mobili cum carpo polleat, qua ſurſum deorſum, antrorſum et retrorſum ſeſe conuertendi facultatem obtinet, eius ſua ctio ſimilis eſt *Remigationi*, quandoquidem per varias et velociſſimas eius particulae agitationes tractionesque, telarum eam arcte amplectantium robur firmitasque ad percutiendum verberandumque aërem non ſolum augetur, ſed etiam regendo, dirigendo, et variis modis inflectendo, iſta in aëre progreſſio perficitur, quorum motuum inſtrumentum praeter muſculos carpi, is praecipue faſciculus fibrarum ſummo eiusdem particulae apici alligatarum, vt primarium cenſeri meretur.

Tantum pro hac vice, ſpeciminis ſolummodo gratia, de ſtructura exteriore *Quadrupedis volatilis Ruſſiae*, quae omnino digna ſunt, vt intimius perſequantur elaborenturque, quoniam, vt ait *Seneca* quando de Naturae myſteriorum ſtudio imprimis de terrae motuum cauſſis locutus haec ſubiicit: Nulla res conſummata eſt dum incipit, nec in hac tantum re omnium maxima ac inuolutiſſima, in qua etiam cum multum actum erit, omnis aetas quod agat, inueniet, ſed in omni alio negotio, ſemper a perfecto fuere principia. * Quamobrem, vt de partium internarum conſtitutione earumque rudi admodum deſcriptione, quam hic ſubiicio, ſententiam meam aperiam, eam pro elaborata et Naturae ſatis conſentanea deſcriptione, ad

* L. An. Senec. Natur. Quaeſt. L. 6. c. 5.

ad quam multum ſedulitatis, peritiae et contemplationis adhibitum ſit, minime haberi volo, ſed hac vice ſolummodo generalem rudemque conſpectum partium internarum exhibere animus eſt.

1. Adeo tenuia ſunt et pinguedine deſtituta integumenta, vt per illa partes ſubiectae fere transluceant.

A cerebro molli et copioſo, eiusque ſtructurae interioris nec non organorum ſenſoriorum ininueſtigatione ſtudio abſtinui.

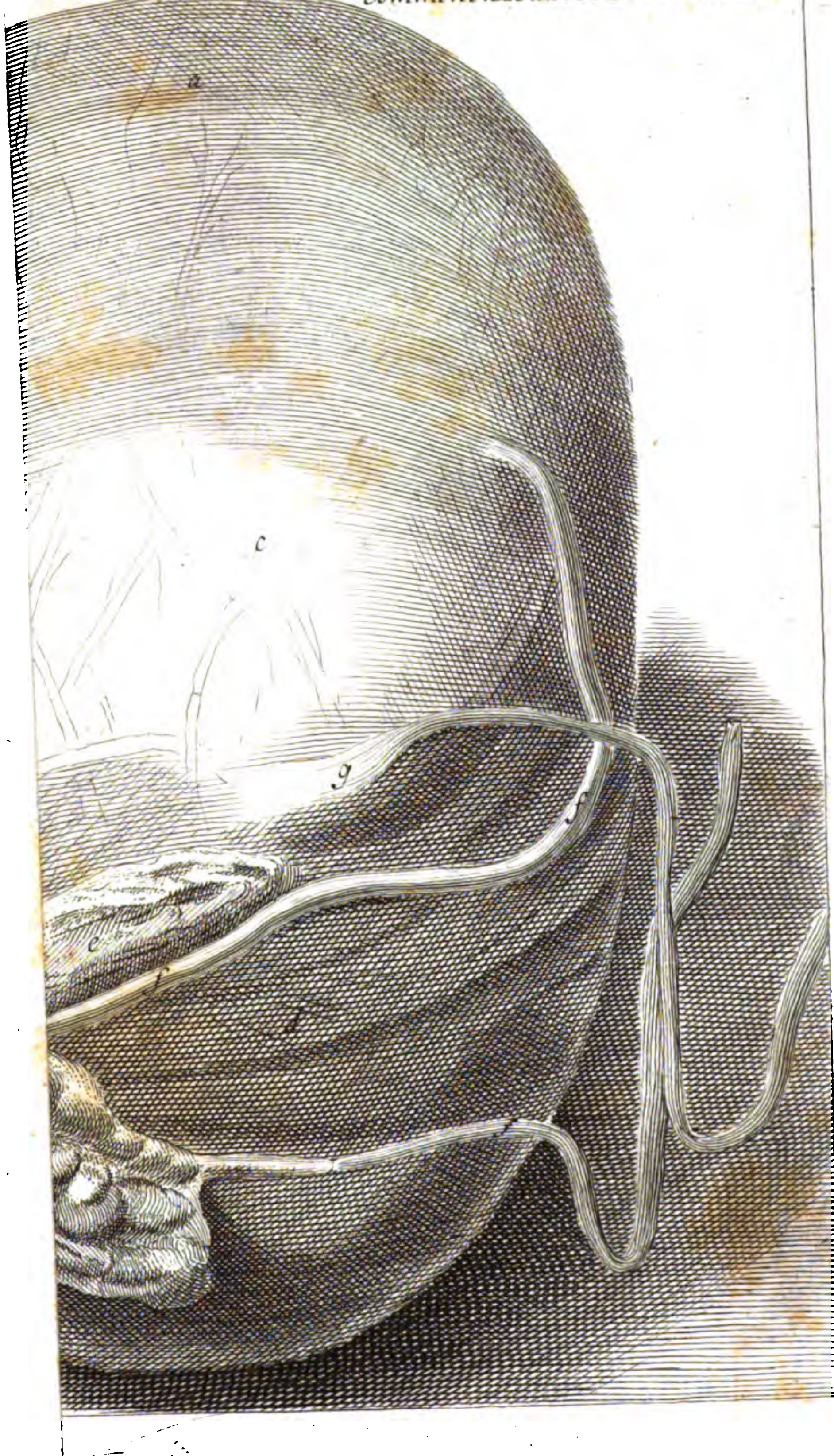
In orbitae inferiori parte, e glandula ibi locata ductum excretorium iuxta dentes molares maxillae ſuperioris hiantem, qui a *Cl. Nuckio* par quartum appellatur, obſeruaui.

Ductus excretorius e glandula maxillari clauiculam fere attingente ortus, ſub lingua deſinens pariter in conſpectum venit.

Foramen linguae vulgo coecum dictum, diſtincte apparuit. Tantum de capite.

2. In collo rem quae ſine exemplo viſa eſt, et cuius contemplatio ſummam admirationem excitat, a me quidem animaduerſam, ſed tanta diligentia quanta res poſtulabat, haud perſecutam fuiſſe fateor, ſilentio tamen praetermittere haud licet. Primo Laryngis operculum ad linguae radicem ſic retra-

retractum erat, vt primo intuitu praefata functio operculi aegre locum obtinere videretur: eius enim apice, ſine vllo cum cartilagine thyroide nexu, vltra eius oram quo alias initium Epiglottidis eſt, vix protenſo, reliqua epiglottidis ſubſtantia valuulam ſigmoideam e linguae tunica efformatam, tam ſubſtantia quam forma mentitur, ad quam vtrinque exilis muſculus e cartilagine arytaenoide ad apicem extremum ſeſe extendens conſpicuus eſt. Porro in eiusdem particulae perluſtratione viam ſeu ductum geminum ſub praefata Epiglottide in linguae radicem ſubſtantiamue penetrantem offendimus. Sed attendite ad Tracheae compagem, quam more aliorum animantium tam terreſtrium quam volatilium, ex annulis nequaquam conſtare, ſed ex variis anomalis et neſcio quibus characteribus ſignatam et conflatam eſſe animaduerſione digniſſimum eſt. Certe nihil elegantiae tam coloris coccinei quam figurae praefatorum characterum, quod peritiſſimi *Chalcographi* opus eſſe diceres, ſuper addi poſſe exiſtimo. Omnes qui rem contemplati ſunt, illam vt diximus vere ſe habere confirmauerunt. Alii vero qui audient tantum, vereor ne inter fabulas recenſeant culpamue vel in me vel in pictorem reiiciant, quale iudiciorum genus hodie ſatis frequens eſt, vbi phaenomena naturae minus ordinaria euulgantur. Vtcunque res cedat, eorum characterum formam ab Academiae pictore bona fide


a
c
g
e
f

fide delineatam hic exhibendam eſſe duxi, donec eius rei penitius illuſtrandae occaſio offeratur. Sed quod maxime lepidum ſilentioque haud praetermittendum eſt, figura nouem characterum hic delineatorum, totidem litteris in Ruſſica Grammatica vſitatis exacte reſpondet. Sed de hac re ſatis.



In pulmone in quo nihil memoratu dignum oblatum eſt, an bronchia ſimilibus characteribus ſignata eſſent nec ne? inueſtigare conatus fui: Ea vero cum annulis tum characteribus carere, nudasque fiſtulas eſſe viſa ſunt.

In corde quod auelanae inſtar rotundum ſacculoque inueſtitum erat, 1. valuularum mitralium defectum. 2. cuiusdam foraminis oblongi, in dextro ſinu more foraminis oualis in venam pulmonalem tendentis praeſentiam obſeruaſſe mihi viſus ſum: tametſi fateor vtriusque obſeruationis veritatem cauere nolim.

Poſtremo, omento, liene, glandulisque meſaraicis Abdomen vacuum: Inteſtina ad modum taeniarum in longum complieatarum, vel organorum inſtar muſicorum diſpoſita, ac inter illa coecum figurae Y: Ambo ductus biliaris videlicet et pancreaticus ſimplici inteſtinorum inflatione ſubito ſeſe manifeſtantes: Duo fibrarum plana vnum a dextris, alterum a ſiniſtris, ven-

triculi orificium ſiniſtrum amplexantia; Glandularum renalium cauitas perampla; hepatis in plures lobulos diuiſi moles ambo hypochondria occupans punctaque rubella candidae ſubſtantiae intermixta illud variegantia et a *Malpighio* in Sciuro vulgari obſeruata. *vid. Exerc. de hep. p.* 11. Poſtremo, in Renibus vice plurium carunculorum, vnica papilla foramen peluis inſtar Epiſtomii obturans; Veſicae vrinariae longiſſimum collum cum accumbente proſtata: ea inquam ſunt, quae obiter in partium internarum in hocce animalculo perluſtratione absque ſedulo examine oblata ſunt.

DE NOTIS CHARACTERISTICIS OSSIVM.

AVTORE

Joſ. Weitbrecht.

Tabula IX. DVm circa dealbationem oſſium ad Sceleta conficienda deſtinatorum occupatus eram, accidit, quod fieri ſolet, vt illa nonnumquam minora praeprimis, a vento, aliaue cauſſa diſiicerentur, atque inter ſe confunderentur. Haec res ab initio vehementer me torſit, quia ſuum cuique locum denuo aſſignare ſine errore non erat in

in mea poteſtate, *nec* definitiones autorum ad oſſa *diſtinguenda* mihi ſufficiebant. Cogitaui igitur de *methodo*, qua huic incommodo mederer; cumque illa nimis rudis et anatomico indigna videretur, quae oſſa ſigno quodam notare, aut vinculis carceribusque coercere iubet; *notas* quasdam *characteriſticas* ex accurata oſſium ipſorum cognitione hauſtas mihi familiares reddidi, incitatus exemplo *Veſalii*, qui, vti de ſe in Hum. Corp. Fabr. L. I. Cap. XL. teſtatur, *longo indefeſſoque ſpectandi vſu edoctus etiam obuinctis oculis cum ſodalibus interdum deponere auſus fuerat, vnius mediae horae ſpatio nullum os ex tot aceruis, in coemeteriis, porrigi poſſe, quod, cuiusmodi eſſet, tactu non diiudicaret.* Nec meus me fefellit labor. Diligenti enim contemplatione tales exquiſiui *notas*, quarum ope, oſſa Sceleti quomodocunque inter ſe miſta, facili negotio in ordinem redigere didici. Iuuabunt iſta forte et alios: dabo igitur deſcriptiones harum notarum et delineationes. Suppono autem, qui haec in vſus ſuos conuertere velint, cognitione oſſium iam imbutos eſſe quodammodo: non enim oſteologiam ſcribo, ſed oſſium ſolos characteres opto.

I. Circa *caput* non opus eſt, vt diu haeream. Raro enim accidere ſolet, vt illud in plures quam in duas partes diuidatur, quae etiam facillime ſibi iterum imponuntur. Caput autem integrum in ſua oſſa, ex quibus caluaria, nares, maxillae componuntur, reſoluere partim in Sceletis conficiendis

locum non habet, partim vero plus artis, patientiae atque imaginationis requirit, quam quod a tyrone expectari poſſit. Dentes quidem inter coquendum nonnunquam excidunt: facile autem redaptantur, ſi ad discrimen inter dentes inciſorios, molares, et caninos notiſſimum, itemque ad proportionem, quae inter alueolos dentesque intercedit, attenderis.

II. In *vertebris* ordinandis in vſum trahenda eſt generalis illa diuiſio, quatenus in ceruicales, dorſales et lumbares diſpeſcuntur. Singulis enim ſpeciebus ſui peculiares ſunt characteres. Cum enim id in ſpina dorſi in genere obſeruandum ſit, vt *a principio ad finem*, quoad craſſitiem et robur ſemper *creſcat*, aliter ac in brutis, in quibus eodem ordine ad lumbos vsque decreſcit: propterea vertebrae colli ſunt omnium minimae, lumborum ſunt maximae, dorſales autem magnitudinem mediam ſeruant; ſed ita, vt quo magis deſcendant, eo magis etiam craſſeſcant. Corpora vertebrarum colli, pro altitudine ſua *latiuſcula* ſunt, corpora vertebrarum dorſi ſuperiora eandem videntur ſeruare proportionem; mox vero altitudo et latitudo ſibi *aequalis* eſt; tum, quae ſequuntur, apparent *altiora* quam *latiora*; infima autem et corpora vertebrarum lumbarium denuo *latitudine* maiori pro altitudine ſua gaudent. Vertebrae praeterea dorſi ad corporum ſuorum margines laterales leues *ſinus* habent, quibus coſtae implantantur. Vertebrae *colli* habent proceſſus

ceſſus ſpinoſos, *breuiſſimos* et plerumque bifurcos, excepta ſeptima et prima: *Dorſales* habent eosdem proceſſus *longos*, ad corpus valde oblique poſitos, apice ſuo ad horizontem ſpectantes, exceptis duabus vltimis, quae iam rectitudine ſua inſequentes lumbares aemulantur: *lumbares* enim eosdem habent proceſſus breuiores, latos, ad angulum rectum perpendiculariter poſitos. Omnem denique ambiguitatem tollunt proceſſus *transuerſi*. In vertebris enim *colli transforati* ſunt pro transmittendis vaſis ceruicalibus; in *dorſo* ad apicis latus leuiter *exſculpti* et ob cartilaginum veſtigia laeuigati ſunt propter applantatas vtrinque duodecim coſtas; in *lumbis* autem *ſimplices* ſunt, recti, et potiſſimum acuti. Ne vertebras inuerſim ponas, vt ſuperiora reſpiciant, quae deorſum ſpectare debebant, ſignum peti poteſt, partim a proceſſibus ſpinoſis, vtpote qui maximam partem ex duabus quaſi laminis ad angulum oblique ſpectantibus compoſiti ſunt, partim vero, et quidem ſecuriſſime omnium, a proceſſibus ſuperioribus inferioribusque, qui ſinus ſuos ſuperficiales, quibus ſe mutuo recipiunt vertebrae, ita poſitos habent, vt in *ſuperioribus extrorſum*, in *inferioribus* autem *introrſum* ſpectent; quae quidem compages in ſpina naturaliter adhuc cohaerente oculos mirifice delectat. Haec de vertebris in genere. Vt vero quaeuis ſpecies ſigillatim collecta in ordinem reducatur; partim tentando inuenies, quae ſibi proxime adiacere debeant: par-

tim ad ea confugiendum eſt, quae ſuperius de magnitudine corporum, et reliquis vertebrarum differentiis diximus: partim adminicula quaedam particularia conquirenda ſunt. Et quidem in vertebris colli ad haec attende: Vertebra prima *caret corpore*, et proceſſum *ſpinoſum* habet *nullum*, ſeptima habet *longiſſimum*, ſecunda dente ſuo ſatis diſtincta, *craſſiſſimum*; praeterea in vertebra prima illi ſinus, qui proceſſus oſſis occipitis recipiunt, et profundius cauati, et longius *protracti* ac *lunati* quaſi ſunt, quam quibus cum vertebra ſecunda articulatur. Reliquae colli vertebrae, quo magis deſcendunt, eo et *tenuiorem* ſpinam habent, et *longiorem*. Ordinem vertebrarum dorſi imprimis adiuuant illi *ſinus*, quos coſtarum gratia corporibus inſculptos ſupradiximus. Quia enim coſtae, exceptis prima et duabus vltimis, applantantur ad margines et confinia corporum duorum; hinc quaeuis vertebra *duos ſinus* habet, vnum in limbo ſuperiore, alterum in inferiore; ſed quo magis vertebrae deſcendunt, eo magis quoque coſtae ab illo confinio recedunt, et ſinus illi in limbo inferiore decreſcunt, donec in tribus vltimis plane euaneſcant, et coſta duodecima in vertebra duodecima ſola, circa medium corpus fere illius requieſcat. Atque horum *ſinuum augmenta* et *decrementa* in redigendis ſpondylis dorſi plurimum te iuuabunt. Vertebrae lumbares praeter craſſitiem corporum ſenſim auctam nullas peculiares notas habere videntur, niſi quod *tertia* ſeu media proceſſum tranſuerſum habeat

beat *longiſſimum*, in reliquis autem ille pro diſtantia a tertia augeatur et decreſcat.

III. Circa *os ſacrum* nulla eſt remora. Neque enim quemquam adeo rudem ac ineptum eſſe exiſtimem, vt illud ita reponat, vt ſuperficies altera, prominentiis ſuis ad modum proceſſuum ſpinoſorum exaſperata verſus peluim ſit directa. Oſſicula coccygis nonnumquam ab oſſe ſacro rumpuntur; illorum autem ſuperficies, quae peluim reſpicit, quadantenus *plana*, oppoſita e contrario, *conuexa* eſt.

IV. In *coſtis* opera danda eſt, vt illas primo omnes, quae ad *idem latus* pertinent, colligas, deinde, *quo ordine* in quouis latere ſe inuicem ſequantur, adtendas, tertio, vt quaenam collectio ad *dextrum ſiniſtrumue* latus pertineat, diſtinguas. Vt finem *primum* obtineas, ſcito, omnes coſtas eiusdem lateris homogeneitatem quandam figurae ſeruare, ita vt partim *curuatura* extremitatum ſurſum deorſumue ſpectans, partim *acutum inferius* labrum partim vero, et imprimis quidem monticuli illi, qui articulationi coſtarum cum proceſſibus transuerſis vertebrarum inſeruiunt, ſimili directione ac poſitione, ſimili modo gaudeant. Selige igitur aliquam coſtam, e. gr. longiſſimam, et cum hac reliquas confer: ſi dicta omnia ſimili modo ſe habent, ad idem illud latus, pertinent; ſin minus, lateri oppoſito erunt adſcribendae. Ordo autem

coſta-

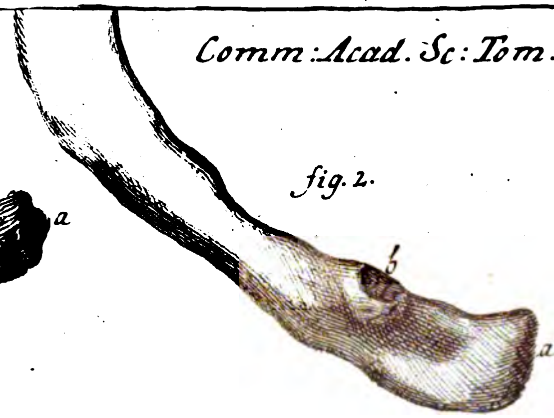
coſtarum talis eſt: *Prima* eſt breuiſſima, *latiſſima* et curuitate gaudens maxima, tum quae ſequuntur, ſemper poſterior priore *maiorem* curuaturae *angulum* habet, ſiue ad rectitudinem inclinat, ita, vt vltima propemodum aeque quidem breuis ac prima, ſed tenuis, et tantum non recta ſit. Deinde a prima ad quintam longitudo ſemper *creſcit*; quinta et ſexta plerumque *aequaliter* longae; a ſexta ad duodecimam longitudo iterum *minuitur*; quae duo, *curuatura* nimirum et *longitudo*, ſimul conſiderata ab errore ſatis cauebunt. Eſt tamen alia quaedam nota, quae ab *extremitate poſteriori* deſumi poteſt. Illa enim, quatenus ſub terminis articulationum binarum cum corpore vertebrarum et harum proceſſu transuerſo, comprehenditur, in quatuor ſuperioribus coſtis, tenuis, *teres* et *longa* eſt, at in ſuccedentibus ſemper pro ratione ordinis craſſior, *latior* ac *breuior* euadit. Atque hae quidem obſeruationes in decem mediis coſtis potiſſimum locum habent. Coſtae autem prima et vltima tantiſper ſeponendae ſunt, donec innotuerit, quaenam collectio ad hoc vel illud latus pertineat; id quod ſequenti modo expiſcaberis: omnes viginti aut octodecim (nam et in vndecima haec nota nonnumquam deficit) ita coram te reponas, vt extremitates poſteriores dexterae tuae, anteriores autem ſiniſtrae, et quidem *auerſim* ſitae, reſpondeant: quae in hoc ſitu locum articulationis cum proceſſu vertebrae transuerſo *conſpiciendum* praebent, ad latus *dexterum* pertinent; quae

Tabula IX. Fig. 1, 2.

vero



fig. 2.



4.



fig. 5.



fig. 6.



8.



fig. 9.



fig. 10.

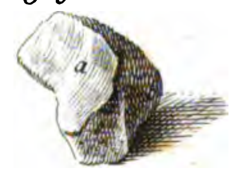


fig. 13.



fig. 14.

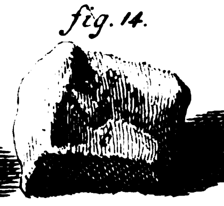
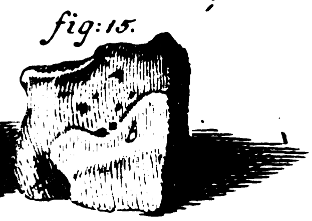


fig: 15.



vero locum illum *occultant*, lateri *ſiniſtro* affigito; ſimiliter in tali poſitione ſulcus labri inferioris *ibi* apparet, *hic* occultatur. Porro in memoriam reuocandum eſt, quod ſupra dixi de vertebris, quod ad corporum ſuorum margines leues ſinus habeant, quibus coſtae implantantur, quodque haec coſtarum cohaeſio ad duorum corporum *confinia* fiat, et vna eademque coſta binis ſimul vertebris adplicita ſit. Obſeruabis enim, tuberculum illud coſtae ex. gr. ſeptimae, quod ſinum corporis vertebrae ſeptimae ſubit, magnitudine et latitudine ſuperare alterum, ad angulum oblique ipſi adiacens, quo eadem coſta ſinulum ad marginem corporis vertebrae ſextae intrat. Quia vero haec coſtae cum vertebra ſuperiore cohaeſio in duodecima, et nonnumquam in vndecima quoque, deficit, imo et articulatio illarum cum proceſſibus tranſuerſis obliteratur; hinc in harum duarum coſtarum ordinatione facile errabis, cauebis autem, ſi ad angulum *tuberoſum* adtendis, qui iuxta articulationem primariam ſitus eo inſeruit, vt coſtae cum praecedente vertebra per ligamenta connectantur. Tandem coſtae primae ita a ſe inuicem diſcernuntur: repone nimirum eas coram te, vt extremitas poſterior manui tuae dexterae, anterior autem ſiniſtrae reſpondeat: tum quae extremitatem poſteriorem *ſurſum* vergentem habet, *ſiniſtro* lateri adſcribes, quae autem plane iacentem monſtrabit, *dextro* lateri adiudicabis. Praeterea latus coſtae primae internum, pectori obuerſum, conuexitatem

quandam prae ſe fert, externum vero ſulcoſum eſt.

V. *Sternum* in duo plerumque oſſa diuiditur, quorum ſuperius enſis *manubrio* ab autoribus aequiparatur; alterum vero *gladius* dicitur. Illud triangulare quodammodo, exterius cauitatibus et monticulis exaſperatum, intus vero planum eſt; hoc vix pollicem latum, ſex autem longum in cuſpidem nunc vnum nunc duos deſinit, cui *cartilago enſiformis* adhaeret; *extus* ſimiliter *aſperum*, *intus leue*, planum et aliquatenus concauum eſt.

VI. *Scapula* dextra a ſiniſtra diſtinguitur: ſi illarum ſuperficiem externam ita reſpicis, vt ſpina *oblique ſurſum* vertat, ſi enim ad dextram ſpectat, tum et dextra illa ſcapula eſt; ſi ad laeuam, laeua; quod idem ex poſitu cauitatis glenoidis pro recipiendo humero addiſcitur.

VII. *Clauicula* duas extremitates habet, quarum, quae *rotunda* eſt, *ſterno* applantatur, plana autem proceſſui coracoidi ſcapulae incumbit. Haec planities in ſuperficie accumbente *aſpera*, in externa laeuis eſt. Ne autem dexteram pro ſiniſtra accipias, ſcito, extremitatem rotundam habere angulum protuberantem *verſus gulam*, quo per ligamentum interclauiculare connectuntur; deinde mox corpus clauiculae incuruari, ita, vt longe a gula deorſum recedat, conuexitasque coſtas reſpiciat; tum vero denuo collum verſus reflectatur.

VIII.

VIII. *Oſſa innominata*, quae in ſceletis adultorum in vnum os coalita deprehenduntur, primo *acetabulum*, id eſt, cauitatem inſignem pro articulatione femoris habent, et quidem extrorſum ſpectantem; deinde ileum externe vbique laeue eſt, interne autem, et quidem verſu poſteriora pro receptione oſſis ſacri plurimis exaſperationibus gaudet. Neque minus inciſura magna inter os ilei et iſchii poſteriora reſpicit. Quae quidem notae ad diſcernenda dextra a ſiniſtris ſufficiunt, ſi forte diſiuncta fuerint.

IX. Oſſa *humeri*, *cubiti*, *radii*, *femoris*, *tibiae*, *fibulae* hanc inter ſe ſimilitudinem habent, vt omnium ſceleti oſſium, pro latitudinis ac profunditatis ratione longiſſimae ſint. Notae autem peculiares, quibus inter ſe diſtinguuntur, ſequentes ſunt. *Femur* et longiſſimum et craſſiſſimum eſt. *Superne vnum* caput ad angulum obliquum ſurſum prominet a corpore, et ex oppoſito eius latere proceſſum inſignem, qui *trochanter maior* dicitur, habet. In *inferiore* extremitate *duo* ſunt capita, quibus cum tibia articulatur. Corpus ipſum ſatis *teres* quadantenus a linea recta deflectit, ſuperiusque ac inferius incuruatur, ita vt conuexitas anteriora reſpiciat. Atque haec curuatura tibi pro norma erit, in aſſignando latere: ſi enim contemplando illam, caput ſuperius magnum tibi a dextris erit, os quoque dextrum habebis, ſi a ſiniſtris, ſiniſtrum; praeterea, quod inter duo capita inferiora

Ii 2 *exter-*

externum eſt, ſuperficiem ſuam cartilagine incruſtari ſolitam paullo *altius* poſitam habet, quam *internum*, et hoc quoque magis *deorſum* producitur.

X. Oſſa *tibiae* tam extremitate ſua ſuperiore, vtpote pro corporis ſui ratione craſſiſſima, duabusque cauitatibus glenoidibus pro receptione capitum femoris donata, quam protuberantia *anguloſa* lineari, ſecundum longitudinem oſſis anteriorem producta, et cuius contuſionem tam difficulter ac doloroſe ferimus, nota ſe praebent. Extremitas inferior baſin ſuam, qua *talum* recipit, propemodum *quadratam* habet, et ad latus internum alteri ſcilicet e regione oppoſitum proceſſu quodam craſſo ac lato munitur, qui vulgo *malleolus* interior audit, et in parte antica in apicem breuem deſinit. Cum igitur memorata *protuberantia* acuta longitudinalis *anterius*, *malleolus* autem *interius* ponatur, id tibi notam *dextrae* ac *ſiniſtrae* tibiae ſufficientem praebet, quod et porro ex cauitatibus ſupra dictis in extremitate ſuperiore, ſub qua anterius in medio protuberantia inſignis pro implantatione tendinum, extendendae tibiae inſeruientium conſpicitur, euceſcit; cum enim caput femoris internum longius deorſum produci diximus, neceſſario illius cauſſa cauitas tibiae interna, illi capiti reſpondens, profundior quoque eſſe debuerat.

XI. *Fibula* plurimum faceſſit negotii. A reliquis oſſibus ſui ſimilibus quidem tenuitate ſua, et figura

figura corporis prismatica diſtinguitur: ſuo autem quaeuis lateri aſſignatur notis ſequentibus. Extremitatum duarum illa, quae *craſſior* et breuior ac rotundior eſt, (ſi quidem, quod anguloſum eſt, rotundum dici poteſt) *ſuperius*, quae autem *latior* tenuiorque eſt, *inferius* cum tibia connectitur; neque minus *facies* illa, qua inferius ad latus tali adplicatur, *ſpatioſior* eſt et amplior, quam vbi ſuperius tibiae adiacet; porro *fibula* locum a corpore auerſum obtinet, ſiue, *exterius* poſita eſt. Tandem quia corpus prismaticum eſſe diximus, *tres* lineas ſeu *angulos* obtinuit, quae *tria latera* terminant; quae autem harum linearum longitudinalium maxime *obtuſa* et rotunda eſt, *exteriora* occupat, quae maxime *acuta* eſt, *anterius* proſpicit. Denique extremitas ſuperior in apicem obtuſum e *medio* prominentem deſinit, inferior autem apicem ſimilem non in medio, ſed a *latere*, et quidem *poſticitus* deſcendentem obtinuit. Atque his reſpectibus obſeruatis, quae dextro ſemori adplicari debeat *fibula*, quae ſiniſtro, dignoſci poteſt.

XII. Viciniae gratia, quae de patellis dicenda ſunt, hic inſpergamus. Has quidem *Veſalius* L. I. c. 32. tam eleganter ac perfecte deſcripſit, vt ſecundum illius ductum, eas quam facillime diſtinguas: ne tamen a nobis intactae relinquantur; ad haec tria totum illarum diſcrimen reducamus. Primo, illarum ſuperficies interior, qua femori ac tibiae applicantur, *laeuis* eſt, et in medio protube-

rans, exterior contra *aſpera* eſt, foraminulis ſcatens longitudinalibus; deinde triangularis quaedam *appendicula deorſum* ſpectat, cum ſuperne corpus ſatis aequabile ſit; denique protuberantia memorata ſuperficiem interiorem diuidit in duos quaſi *ſinus* ſuperficarios, quorum qui *latior* eſt, *externo* foemoris capiti applicari debet. Atque his notis adiutus, quae dextera ſit, quae ſiniſtra, mox intelliges.

XIII. *Brachium* tria oſſa conſtituunt, os *humeri*, *vlna* et *radius*; horum longiſſimum et craſſiſſimum eſt os *humeri*, quod imprimis in extremitate ſuperiori capite *globoſo* munitum eſt, quo in cauitatem glenoidem ſcapulae poſſit immitti, quale nullum aliud os habet. Hoc autem caput corpori oſſis non perpendiculariter inſidet, ſed ad latus quaſi appoſitum eſt, ſiquidem et memorata cauitas non deorſum ſed extrorſum ſpectat. Ad diſtinctionem dextri a ſiniſtro tres notae ſatisfaciunt: *ſulcus* proxime ad caput corpori oſſis ſecundum longitudinem eius inſcriptus, et recipiendo tendini longo muſculi bicipitis deſtinatus; *proceſſus* maior ad latus alterum iuncturae inferioris; et *fouea* profunda pone dictam iuncturam, motui olecrani finem ponens. Quodſi igitur os humeri ita locaueris, vt caput et proceſſus maior interiora, ſulcus anteriora, fouea autem poſteriora reſpiciant, in loco conuenienti repoſuiſti.

XIV,

XIV. Oſſa *cubiti* ſimilitudinem quandam inter ſe habent; nam corpora illorum ſunt eiusdem fere craſſitiei, eiusdem quoque propemodum figurae cum ſpina acuta longitudinali, qua ſe mutuo reſpiciunt; et, ni *vlnae olecranum* appoſitum eſſet, eiusdem quoque longitudinis. Ambo gaudent apophyſi altera *craſſa*, altera *tenui* et rotunda, ſed ordine inuerſo, et figura diuerſa. *Vlna* enim in ſuperiore extremitate cauitatem inſignem, *ſigmoidem* dictam habet, a latere poſtico, proceſſu ingente, quem iam aliquoties *olecrani* nomine allegauimus, munitam; inferior autem vlnae extremitas in capitellum *globoſum*, cum breui proceſſu *ſtyloide* laterali deſinit. At *radius* ſuperne apophyſin habet *rotundam*, vbique aequalem, cum cauitate glenoide, qua tuberi in iunctura oſſis humeri ſibi deſtinato inſidet, et ad omnes motus, flexorium, pronum et ſupinum aptus redditur; inferne autem lata eius apophyſis fouea *duplici* per lineam in medio protuberantem discreta ordinem carpi ſuperiorem recipit, et manus extremae motum agilem reddit. Superne ad latus proceſſus vlnae *ſinulus* inſculptus eſt, ad recipiendam *criſtam*, qua radii capitulum ſuperius quaſi circumuoluitur; inferne viciſſim in radio ſimili modo *ſinus* excauatus eſt, recipiendi vlnae *capitelli* gratia. Quibus obſeruatis apparebit, quomodo oſſa cubiti ſibi inuicem immitti debeant. Ne autem *radium* ſiniſtrum ad vlnam dextram applices: conſidera manum ſitu *ſupino*, tunc enim intelliges, radium obtinere lo-

cum

cum a corpore auerſum, et reſpondere *pollici*, *vlnam* vero obuerti corpori et reſpondere digito auriculari. Quia vero talis proximitas circa iuncturam tantum cum oſſe humeri perpetuo conſtans ſit, mutato autem ſitu manus ſupino in pronum illa inuertatur, hac ratione ſoli vlnae ſuum latus conueniens aſſignatum manet; radii vero gratia hoc addendum, illius extremitatem inferiorem ha-
Fig. 3. bere latus *ſupinum* ſiue volae manus reſpondens, *planum* et aequabile, *pronum* vero ſiue dor-
Fig. 4. ſo manus continuum, *conuexum* crenisque ac ſulcis *exaſperatum* pro transmittendis dirigendisque tendinibus muſculorum digitos extendentium. Ad quam proprietatem ſi attenderis, illa ſola ab errore te praeſeruabit.

XV. Oſſa *carpi* ac *tarſi* id inter ſe commune habent, vt figuris gaudeant omnium totius ſceleti oſſium maxime irregularibus, inter ſe ipſa autem nullam plane conformitatem ſeruent; hinc vel hic ſolus character oſſa carpi et tarſi a reliquis diſcernit. Oſſa tarſi autem ab oſſibus *carpi* vincuntur irregularitate et magnitudine; vnde factum eſſe coniicio, cur oſſa *tarſi* peculiaria nomina ob figuras ſuas ſatis adhuc ſimplices a veteribus acceperint, oſſa carpi vero nulla. Sed cuiuis oſſi ſuum aſſignare locum memoriter, id non ſine imaginatione pertinaci erit efficiendum. Tentabimus tamen aliquid in re perplexa, initium a carpi oſſibus octo facientes. Vt ſciamus, de quo oſſe ſermo ſit, retine-

tinebimus methodum veterum, qui ea primum, ſecundum, tertium etc. octauum dixerunt. Diſpeſcuntur in duos ordines, ſuperiorem et inferiorem, qui ſe mutuo recipiunt articulatione ad enarthroſin quam proxime accedente. Quaterna ordinem conficiunt. *Primum* et *ſecundum* ordinis ſuperioris, vbi cum radio cohaerent, *gibba* ſunt, et per ginglymum cum illo articulantur: *Tertium* ſecundo applantatur ad latus a corpore *auerſum*: *Quartum ſolitarium* cum tertio articulatur. Neque minus primum et ſecundum conficiunt ex oppoſito latere cauitatem *communem* profundam pro receptione oſſium ordinis inferioris; *Tertium* cauitatem illam *complet*. Immittuntur autem in eandem ex ordine inferiore, imprimis os *ſeptimum tubere* inſigni; os *ſextum* et *octauum* vero ad latera ſeptimi poſita caput pro implenda cauitate *adaugent*. *Quintum* cum primo et ſexto iungitur, et recipiendo *pollici* deſtinatum eſt. Haec quatuor oſſa ordinis inferioris quaſi in arcu circuli poſita eſſe videntur, et inferius ſuperficies ſuas fere *triangulares*, non tamen planas habent, quibus quinque oſſa metacarpi, ſuperficiebus reſpondentibus coaptantur. His praemiſſis, oſſa propius contemplabimur, incipiendo ab iis, quae in oculos luculentius incurrunt. Os *minimum quartum* eſt, ſemigloboſum, *vnica* iunctura ſeu vnico ſinu gaudens pro receptione tertii. Os *octauum* imprimis *lingula* ſua prominente, cui ligamentum annulare carpi internum adnaſcitur, diſcerni-

ſcernitur. *Septimum* quodammodo pyramidale eſt, loco apicis in *tuber* inſigne, globoſum, deſinens. Os *primum latum* eſt, et *oblongum*, in medio *cauatum*, pro recipiendo latere interno tuberis oſſis ſeptimi, extus *conuexum*, et duplici iunctura per ſulcum transuerſum diſtincta, tam pro ſinu radii, quam pro oſſe quinto et ſexto, eminens. Os *ſecundum* extus ſimiliter *globoſum* eſt, pro articula-
Fig. 7. tione radii, intus vero concauitatem *lunatam* aequabilem habet, propter ſummitatem eiusdem memorati tuberis, et complendae cauitatis communis gratia. His remotis reſtant oſſicula tria, a quibus *tertium* imprimis ſuperficiali et *ouali* iunctura cum oſſe quarto diſtinguitur. Os *ſextum* vero *quatuor* ſinibus ſeu excauationibus ad angulum non plane rectum poſitis quaſi Trapezium format. Os *quintum* ſingularem iuncturam habet, quam alibi*
Fig. 9. deſcripſi pro articulo pollicis, et *foſſulam* longitudinalem ad latus iuncturae pro tranſitu tendinis radiaei interni, verſus volam, inter duas protuberantias, quarum altera intra confinia oſſis primi et ſexti ſe immittit, altera lingula oſſis octaui oppoſita firmando ligamento annulari inſeruit. Iam ſi in ordinem ſuum redegeris haec oſſa, curandum eſt, vt, quae ad latus quoduis pertinent, colligas. In hoc autem partim plurimum adiumenti afferent ea, qua iam diximus, et imprimis obſeruatio iuncturarum pro oſſibus metacarpi; partim vero ea, quae iam de ſingulis oſſibus notamus. Sunt autem ſequentia. Os

* Vid. Comment. Acad. Imper. Tom. IV. p. 238.

Os *primum* quaſi ex duobus compoſitum videtur, quae per *ſulcum* ſupra memoratum diſtinguuntur. Repone igitur illud coram te ſecundum latitudinem ſuam, vt et conuexitatem duplicem, et ſulcum reſpicere poſſis. Si ille ſulcus a ſiniſtra verſus dextram oblique deſcendet, os ſiniſtrum erit, ſi e contra a ſiniſtra ad dextram oblique aſcendit, ad carpum dextrum os illud pertinebit. Fig. 5.

Oſſis *ſecundi* cauitas *lunata* alterum cornu habet *acutum*, alterum latiusculum, acutum in *dorſo* manus apparet, latiusculum in vola. Ad latus cauitatis alterum eſt ſinulus leuiter exſculptus, ſimiliter *lunatus*, ad alterum ſinus propemodum *quadrangularis*: ſinus lunaris oſſi primo coaptatur, ſinus quadrangularis oſſi tertio. Hae notae dextram et ſiniſtram determinabunt. Fig. 7. Fig. 6. 7.

Os *tertium* tres habet iuncturas pro connexione cum oſſe ſecundo, cum quarto, et cum octauo. Reſpice igitur ſimul ad binas iuncturas primas; ſi tertia dexterae tuae reſpondet, os dextrum quoque eſt, ſi ſiniſtra, ſiniſtrum.

In oſſe *quarto* imprimis *rotundum* aliquod *tuberculum* inſigne protuberat, verſus volam ſpectans, pro inſertione vlnaris interni, et quo, mediante ligamento, cum lingula oſſis octaui coniungitur; deinde in illo tuberculo conſpiciuntur Fig. 8.

 veſti-

veſtigia inſertionis fibrarum ligamenti annularis dicti; denique externe corpus huius oſſis aequabiliter conuexum eſt, interne vero, volam verſus, inter iuncturae marginem et corpus ipſum, ſulcus aliquis leuis latiusculus conſpicitur; quo ſupra dictum tuberculum tanto magis eleuatur. His obſeruatis, vnumquodque loco ſuo proprio reſeruari poterit.

Fig. 9. Os *quintum* pro pollice habet in iunctura ſua *ſinus* duos, anguſtiorem et profundiorem in latere dorſum manus reſpiciente, *ampliorem* in latere oppoſito. Neque minus foſſula ſeu *ſulcus* ſupra memoratus conſpici debet ſuperius in vola. Talis ſitus determinabit dextrum et ſiniſtrum.

Fig. 10. Os *ſextum* ſinus habet quatuor, qui *maximus* eſt, metacarpi oſſibus ſuſtinendis inſeruit, et *lunatus* eſt, ita vt cornua digitum medium reſpiciant. Cornu autem in *vola* poſitum *acutius* eſt; in dorſo, latius.

Fig. 11. Os *ſeptimum* baſin pro ſuſtinendo metacarpo propemodum triangularem habet, ita, vt apex in vola terminetur. In latere autem altero ſingularis *iunctura* lambdoides apparet ſecundum *longi-*
Fig. 12. *tudinem* oſſis *producta*, et iuncturae ſimili in oſſe octauo, cum quo articulatur, correſpondens.

Fig. 12. Os *octauum*, ſi ad quadrangularem baſin, cui duo oſſa metacarpi inſiſtunt, reſpexeris, *lingulam*

ſuam

ſuam aduncam ita poſitam habet, vt verſus pollicem inclinetur, et cauitatem illam conficiat, in qua tendines flexorum ſub ligamento annulari reconduntur.

XVI. *Tarſus* habet *ſeptem* oſſa. Primum *calcaneum* maximum eſt; ſecundum *talus*, ſeu aſtragalus, ſequitur magnitudine, inter calcaneum ac tibiam interiacet, et imprimis *globoſo* capite diſtinguitur. Dein pari paſſu ambulant os tertium *nauiculare* ſeu ſcaphoides, et quartum *cuboides*; illud *oblongum* cauitate ſua ſphaeroide ſe prodit, hoc *anguloſum* eſt; illud caput aſtragali recipit, hoc ſinui calcanei ſe immittit. Reliqua tria *cuneiformia* iuxta ſe poſita oſſis nauicularis faciei triplici applicantur, et cum tribus metatarſi oſſibus articulantur. Illorum, quod *maximum* eſt, *interius* iacet et pollici reſpondet, *minimum* duo reliqua *interiacens* digito ſecundo; quod magnitudinem mediam ſeruat, exterius digito medio. Quartum et quintum os metatarſi recipit cuboides. *Calcaneum* igitur infimam ac *poſticam* pedis extimi partem conſtituit, *talus ſuperiorem*, oſſa *cuneiformia anterius*, *ſcaphoides* autem et *cuboides* ſitu *medio* locata ſunt.

Calcaneum habet proceſſus *quatuor* notabiles, *poſticum*, cui inſiſtimus; *anticum*, cui os cuboides applicatur, *ſuperiorem* et *lateralem* pro receptione tali. Inter proceſſum lateralem et poſticum cal-

caneum quaſi *excauatum* videtur, cum in latere oppoſito aequabiliter tuberoſum ſit; iſta excauatio ſemper in *interiore* parte pedis debet eſſe conſtituta. Obſeruato igitur reſpectu proceſſuum caeterorum, ſi *lateralis* proceſſus tibi a ſiniſtris eſt, calcaneum ad pedem dexterum pertinet, ſi a dextris, ad ſiniſtrum.

Aſtragalus ſeu *talus*, iuncturas quatuor habet prae reliquis notandas: *caput anteriora* proſpicit; iunctura concaua *inferior calcaneo* immittitur; *ſuperior* conuexa *quadrangularis* tibiam ſuſtinet; *lateralis triangularis* fibulam recipit. Cum vero fibula in externo pedis latere poſita ſit, hinc illa iunctura triangularis ſimiliter *exteriora* occupare debet; in dextro igitur pede a dextris, in ſiniſtro a ſiniſtris erit.

Oſſis *ſcaphoidis* margo ſuperior atque interior craſſus eſt, et apophyſin magnam lateralem habet; quae quidem *apophyſis* ſi ceteris rite poſitis *interius* apparet, cuinam pedi os annumerandum ſit, ſatis patet.

Oſſis *cuboidis* iunctura poſterior, qua ad calcaneum apponitur, faciem fere *plani* ſemicirculi habet, cuius arcus exteriora occupat. Neque minus iunctura anterior, quae cum metatarſo copulatur, ad iuncturam poſteriorem *inclinatur*, *angulo* ſimiliter *extrorſum* producto, in dextro pede dextrorſum, in ſiniſtro ſiniſtrorſum. Facies ſuperior *plana* eſt, inferior autem *ſinuoſa* et protuberans.

Os

Os *quintum*, ſeu *cuneiforme* maximum, anteriorem iuncturam habet *lunatam*, cui primum os pollicis adaptatur; *cornua extrorſum*, ſiue reliqua cuneiformia reſpiciunt. Ceterum hoc os ſi cuneiforme nomen meretur, inuerſo certe ſitu poſitum eſt, acie tenui ſurſum, corpore autem craſſo deorſum ſpectante. Eſt autem in latere ſuo conſpicuo conuexum, in occulto concauum, vt rotunditati pedis ſuccurrat; ibi quoque iuncturam *lambdoidem*, iuncturae ſimili in oſſe *ſexto reſpondentem* exhibet, cuius quidem latus alterum ſuperius *parallele* antrorſum currit, alterum perpendiculariter deſcendit. Fig. 20. Fig. 13.

Os *ſextum* et *ſeptimum* vere cuneum aemulantur; corporis facies *lata ſurſum* ſpectat, acies vero deorſum. Iuncturae, queis inuicem copulantur, ſunt ad latera partis poſticae. Iuncturae autem anticae et poſticae ſunt triangulares, poſticae tamen latiores et breuiores anticis. Iam ſi os ſextum iuncturam lambdoidem in latere ſiniſtro habet, ad pedem dextrum pertinet, quia os quintum a ſiniſtris eſt; quod vice verſa de oſſe ſiniſtro erit dicendum. Os *ſeptimum* vero lateraliter per iuncturam triangularem cum oſſe cuboide copulatur; quae iunctura ſi a dextris apparet, os quoque dextrum eſt, ſi a ſiniſtris, ſiniſtrum. Fig. 14. 15.

XVII. Oſſa poſtbrachialis ſeu *metacarpi*, et *metatarſi*, *longa* et *teretia* ſunt; vt inter ſe diſtinguantur,

Tabula X. Fig. 16, 17. guantur, nota haec: oſſa metacarpi, vbi cum digitis iunguntur, capitulum habent *craſſius* et *latius*; oſſa metatarſi autem pro ratione longitudinis ſuae ſunt ſubtiliora ac tenuiora.

Oſſa *metacarpi* ſoleo numerare *quinque*; nam primum os pollicis in metacarpo refero, ſecundum in phalanga digitorum prima, tertium in phalanga digitorum extima, ita vt pollex phalanga media carere dicendus ſit, quod item de pollice pedis intellectum velim. Os pollicis primum, a reliquis metacarpi oſſibus differt breuitate et craſſitie, deinde per peculiarem iuncturam cum oſſe quinto carpi iungitur, quam loco citato deſcripſi. Vt dextrum a ſiniſtro diſtinguas, videbis, latus oſſis *internum*, ſeu a reliquis digitis auerſum, ſemper eſſe *breuius* quam externum, deinde, ſinus alter iuncturae anguſtior eſt in latere indicem reſpiciente, amplior in latere oppoſito. Caetera *quatuor* oſſa ſibi inuicem ſuccedunt longitudine decreſcente, ita, vt quod *indicem* ſuſtinet, *longiſſimum* ſit, quod *auricularem breuiſſimum*; reliquorum duorum *craſſius* vero digitum *medium*; quamquam non eadem proportio huius decrementi obſeruetur. Vt ſcias, quae ad ſiniſtram pertineant, ſequentes retine notas: Os *indicis*, vbi cum carpo iungitur, *capitulum* habet omnium *craſſiſſimum*, et in eo *protuberantiam* magnam, qua in foueam, quae eſt inter ſextum et ſeptimum os carpi, immittitur; porro ex vno latere tantum articula-

tur

tur cum oſſe metacarpi ſequente per iuncturam duplicatam. Cum igitur, vbi haec iunctura eſt, os digiti medii applicatur, hinc ſi ad dextram pertinet manum, a dextris quoque debet eſſe; ſi ad ſiniſtram, a ſiniſtris.

Os, quod *medium* digitum ſuſtinet, in latere capituli ad carpum, habet *proceſſum* acutum in dorſo manus conſpicuum, iuxta os antecedens; Fig. 26. 27 porro eadem iunctura duplicata conſpicitur in vno latere, quae in oſſe praecedente, in altero vero *duae cauitates* glenoides paruulae *rotundiuſculae*, pro recipiendis *capitulis* lateralibus oſſis ſequentis. Ex quorum omnium ſitu dextrum a ſiniſtro diſcernere poteris. Eadem concludi poſſunt in oſſe *quarto* metacarpi, annularem ſuſtinente, ex iisdem *capitulis lateralibus* elatioribus. In latere capitulis his oppoſito, ſinulus latiusculus horizontalis apparet, et ſimplex, pro recipiendo oſſe *quinto*. Os *quintum* enim ex *vno* tantum latere articulatur, ex altero liberum eſt; vbi igitur iunctura deficit, illud latus terminum manus ponit.

XVIII. Oſſa quinque *metatarſi*, vt ordine creſcunt, ita longitudine decreſcunt: haec autem differentia cum inter os *tertium* et *quartum* non ſemper ita euidens ſit ac inter ſecundum et tertium, in ſpecie notandum eſt, *baſin* oſſis *quarti*, qua cum oſſe cuboide articulatur, magis *rotundam* eſſe, quam longam, et in aliquibus *concauam*, et cum oſſibus

Fig. 19. ſociis vtrinque articulatione *ſimplici* iungi, cum con-
tra os *tertium* ex vno latere cum *ſecundo* iunga-
Fig. 18. tur articulatione duplici. Os pollicis a reliquis dif-
fert magnitudine ſua, craſſitie, et corpore prisma-
tico. Os *quintum* vero per proceſſum oblongum
lateralem circa extremitatem ſuperiorem diſtin-
guitur, qui verſus exteriora protuberat. Ex cur-
uitate horum oſſium plantam et dorſum facile di-
gnoſcimus. Dextra autem et ſiniſtra his notis ſe-
ligitur. *Pollicem* ad os cuneiforme per iuncturam
Fig. 20. *lunatam* adaptari ſupra diximus, cornua autem iun-
cturae extrorſum ſiue ad reliqua oſſa ſpectare; id
igitur in pollicis iunctura quoque erit obſeruan-
dum. Deinde oſſa metatarſi in capitulo inferio-
Fig. 21. re habent duos proceſſus paruos, *aduncos* quaſi,
et verſus plantam recuruos, quorum qui pollici
proximus eſt, *breuior*, alter vero *longior* eſt.

Fig. 22. 23. XIX. *Phalangae* digitorum *manus* ſuperant di-
gitos *pedum* longitudine et craſſitie, ſi pollicem
pedis exceperis. Digiti quoque pedum corpora
habent *tenuia* ratione *capitulorum* ſuorum. Diffe-
rentia inter phalangam digitorum manus primam
et ſecundam ab articulationibus peti poteſt. Pri-
ma enim in extremitate ſuperiori iungitur cum
oſſibus metacarpi per *enarthroſin*, hinc ibi *foueo-
lam* vnicam habet; in extremitate autem inferiore
iungitur cum phalanga ſecunda per *ginglymum*, et
hunc in finem capitulis *duobus* cum interiecto ſi-
Fig. 24. nulo inſtructa eſt, quibus viciſſim *duae* foueolae

eum interiecta lineola media eminente reſpondent in extremitate ſuperiore oſſium phalangae ſecundae. Haec oſſa vt et reliqua digitorum, a latere volae ſunt *plana* et recurua, in *dorſo* autem conuexa et rotundiuscula. *Longiſſimum* illorum ad digitum *medium* pertinet; ex duobus breuiſſimis quod *craſſius* eſt, *pollici*, quod *tenuius auriculari* adiudicari debet; quod aliorum duorum ad *indicem* pertinet, id ple- plerumque *breuius*, ſed craſſius, quod ad *annularem*, id *longius* ſed tenuius eſſe ſolet: non igitur eundem ordinem longitudinis cum oſſibus metacarpi ſeruant. Regula autem diſcriminis inter dextrae et ſiniſtrae manus oſſa haec videtur eſſe. Ex capitulis duobus in extremitate inferiore, ſemper paulo *altius* et craſſius ſolet eſſe id, quod digitum *medium* reſpicit; in *medii* autem *digiti* oſſe in ſpecie capitulum in vicinia *annularis* altius eſt; in pollicis phalanga praeterea latus a digitis *auerſum longius* productum eſſe videtur quam latus oppoſitum. Fig. 25.

Phalanga *ſecunda eundem* propemodum ordinem ſeruat, quam prima; quod enim longiſſimum eſt, ad digitum medium pertinet, quod breuiſſimum, ad minimum. Reliquorum quod craſſius et breuius ad indicem, quod longius et tenuius ad annularem pertinet. Diſcrimen inter dextra et ſiniſtra peti debet ex *articulatione* cum phalanga *prima*. Nam quemadmodum ibi capitula verſus medium digitum (et in ipſo medio digito verſus annularem) paulo *altiora* ac craſſiora ſunt, ita et

phalangae ſecundae foueolae illis capitulis correſpondentes, etiam *profundiores* ac toto habitu maiores conſpiciuntur.

Oſſa phalangae *tertiae* inter ſe vix diſtingueris: en notas: *Pollicis* eſt *maximum*; poſtea digiti *minimi* eſt *minimum*; *medii* eſt inter reliqua tria *craſſiſſimum*, non ſemper et longiſſimum; quod reſtat *longiſſimum*, ad *annularem* pertinet, vltimum ad indicem. Sed dextra a ſiniſtris discernere; id quidem effectui dare hactenus non potui, ſi os pollicis excipias, quod in latere a digitis auerſo foueolam *ſpatioſiorem* habere videtur.

XX. *Primum* digitorum *pedis* internodium ſimiliter differt a reliquis internodiis *longitudine*, et in quouis ordine quod pollici propius eſt, longius quoque eſt. Os pollicis ſingulari ſua et proportionata magnitudine a ceteris quatuor diſtinguitur, et ſi os quartum ac quintum ſibi fere longitudine ſimilia ſunt, differentiam a *craſſitie*, quae oſſi *quinto* conuenit, petere oportet. Os pollicis habet latus internum, ſiue a digitis auerſum longius quam id, quod oppoſitum eſt; ceterorum extremitas inferior qua cum internodio digitorum ſecundo iunguntur per *ginglymum*, capitulum alterum, quod eſt pollici *propius*, *altius* quoque habet, vti id in phalangis digitorum manus obſeruatum eſt; quamuis id propter oſſium exiguitatem difficile ſit cognitu.

Fig. 26. (margin, beside "gius quoque eſt.")

Fig. 26. (margin, beside "habet latus internum")

Reliqui duo ordines quemadmodum pro diſtantia a pollice, longitudine decreſcere dicti ſunt; ita

fig. 18. fig. 19.

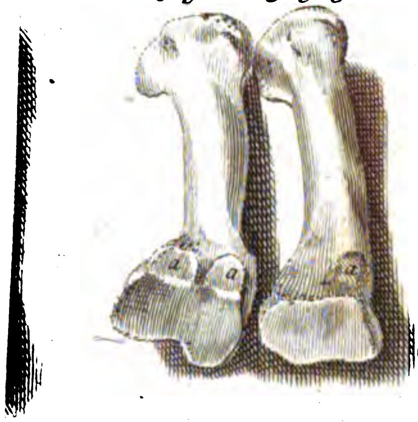


fig. 20.

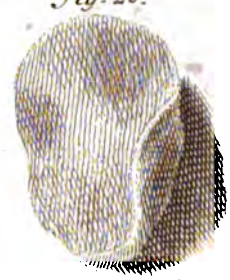


fig. 22.



fig. 23.



fig. 24.







fig. 26.



fig. 27.



ita et difficilius eſt, dextra a ſiniſtris diſcernere; id quod partim ab *exilitate* horum oſſiculorum prouenit, partim vero a diuerſa figura, in quam pedes ab vſitatis calceis torquentur, dependet. Saepe in digito tertio et quarto phalanga extima cum media coaluit. Solum os pollicis extremum ad latus iuncturae internum, i. e. a reliquis digitis *auerſum*, protuberantiam *latiorem*, longiorem et *aſperiorem* habet, quam in latere externo oppoſito. Fig. 27.

XXI. Reſtant oſſa *ſeſamoidea*, quae cum reliquis confundi poſſe dubito. Illa ſola, quae internodio pollicis pedis primo appoſita ſunt, conformitatem aliqualem habent cum oſſe *quinto carpi*, quia vero praeter ſuam conuexitatem *nulla* alia protuberantia praedita ſint; hinc ab oſſiculo carpi facile diſtinguntur.

Si quae ſunt, quae ex deſcriptione non ſatis intelliguntur, ea fortaſſe aptius peti poſſunt ex *figuris*, quae imaginationem plurimum adiuuare ſolent, quasque adiicere hic libuit: Vbi generaliter notandum eſt, oſſa omnia e dextro latere deſumta eſſe.

Tabula IX. et X.

Fig. 1. Extremitas poſterior coſtae quartae.
Fig. 2. Extremitas poſterior coſtae octauae.
In ambabus eſt
a. articulatio cum corpore vertebrae.
b. articulatio cum proceſſu transuerſo.
Fig. 3. 4. Extremitas radii ad carpum.
a. ſuperficies plana.
b. ſuperficies conuexa, aſpera.
Fig. 5. 6. Os carpi primum.
a. ſulcus.
b. ſinus lunatus pro recipiendo oſſe ſecundo.
c. cauitas pro recipiendo tubere oſſis ſeptimi.

F. 7. *a*. Oſſis carpi ſecundi cornu acutum.
b. concauitas lunata.
c. ſinus quadrangu aris.
Fig. 8. *a*. Oſſis quarti carpi tuberculum.
b. ſulcus latiusculus.
Fig. 9. Os carpi quintum.
a. ſinus iuncturae profundior. *b*. ſulcus.
Fig. 10. *a*. Oſſis ſexti ſinus lunatus.
b. ſinus pro adaptando oſſe quinto.
Fig. 11. *a*. Oſſis ſeptimi tuber.
b. iunctura lambdoides, quae iungitur oſſi ſequenti.
Fig. 12. *a*. Oſſis octaui lingula.
b. iunctura longitudinalis lambdoides.
Fig. 13. 14. Os tarſi ſextum cuneiforme.
a. iunctura lambdoides.
b. iunctura duplicata, cui ſimilem habet
Fig. 15. *b*. Os ſeptimum.
Fig. 16. Os metacarpi tertium.
a. proceſſus acutus.
bb. duae cauitates glenoides.
Fig. 17. *bb*. duo capitula in oſſe quarto metacarpi.
Fig. 18. *aa*. oſſis metatarſi tertii articulatio duplex.
Fig. 19. *a*. Oſſis quarti articulatio ſimplex.
Fig. 20. Iunctura lunata oſſis metatarſi pollicem ſuſtinentis.
Fig. 21. Capitula inferiora oſſium metatarſi.
a. proceſſus aduncus longior, *b*. breuior.
Fid. 22. Os phalangae primae digitorum manus.
Fig. 23. Os phal. primae digitorum pedis.
In utroque notatur
a. fouea in extremitate ſuperiore.
b. duo capitula in extremitate inferiore.
Fig. 24. *a*. foueola duplex in oſſe phalangae ſecundae digitorum manus.
Fig. 25. Extremitates ſuperiores phalangae primae digitorum manus.
a. capitella altiora.
b. breuiora.
Fig. 26. *a*. latus productius oſſis primi pollicis pedis.
Fig. 27. *a*, protuberantia aſpera oſſis pollicis extremi.

DE

DE AVGMENTO PONDERIS,
QVOD CAPIVNT QVAEDAM CORPORA, DVM IGNE CALCINANTVR.

AVTORE
Joh. Georg. Gmelin.

§. 1.

PLurima eſſe corpora, quae dum calcinantur, augmentum ponderis ſui capiunt, extra omne dubium poſitum eſt, ſi vel ſola *Boylei* conſiderentur experimenta, quae Tr. ſuo de flammae ponderabilitate recenſet. Verum ratio huius augmenti plurimis videtur obnoxia dubiis. Vnam quidem generalem et communem eſſe in omnibus, quae id augmentum patiuntur, corporibus, veriſimillimum eſt.

§. 2. Si igitur vni corpori eam rationem aſſignare queamus, eandem et reliquis applicare licebit. Ex vnius ergo corporis exacto examine noſtro forte potiemur ſcopo. Malumus tale ſeligere, quod plurium iam manibus tritum eſt; ita enim hunc finem non ſolum nos impetrare, ſed et experimenta hactenus inſtituta vel corrigere vel conciliare poſſe confidimus.

§. 3. Antimonium in hunc cenſum venit. Id enim non ſolo carbonum, ſed et ſolari igne torſum

ſum eſt. Conuenit ergo recenſere experimenta hactenus cum eo inſtituta, et quid ex eis concludi poſſit aut in qua re adhuc deficiant, diſpicere.

§. 4. *Bouleduccius*,* poſtquam antimonium igne carbonum, lento quidem, qualis ſemper ad hoc opus requiritur, in vaſe fictili calcinaſſet, eius octo vncias ad ſex vncias et ſeptem fere drachmas redegit, quam decrementi proportionem et ego propemodum, cum in ferreo vaſe calcinationem inſtituerem, obſeruaui. *Kunckelius*, ** libram antimonii calcinatione ſenſim ſenſimque decrementum pati trium prope vnciarum, ex eo tempore pondus recuperare priſtinum, et ad vnam, imo ad vnam cum ſemiſſe, inſuper augeri ſcribit, quod ſuperioribus contrariari videtur obſeruationibus. Mihi tamen id euenit, vt, cum antimonii octo ad ſex vncias calcinando redegerim, eae poſtea, vbi calcinatione vlterius inſtiti, vltra ſex drachmarum incrementum adhuc capeſſerint. Vt vero ad priſtinum tale antimonium redeat pondus, imo quid vltra adhuc lucretur, id mihi haud ita viſum eſt; continuando enim ſex harum vnciarum, quae ſex drachmis auctae erant, calcinationem, fumus albicans, leniſſimo igne ex calcinata materia exhalans, ſatis indicabat, ſulphuream partem vt plurimum auolaſſe, et metallicam in fumum reſolui, vt omnis vlterior expectatio fruſtranea fuiſſet. Itaque

* Hiſt. A. R. S. ed. Pariſ. 1701. L. V. P. II. S. I. C. IV. §. 1.
** Laborat. Chym. P. III. C. XXXIV.

Itaque haud erraſſe videtur *Kunckelius*, dum tradit, àntimonium ab igne augmentum capeſſere; ſed iacturam, quam patitur, maiorem non debuiſſet pronunciare augmento. Illud enim decrementum ponderis et in Msto quodam Diario Regii cuiusdam Laboratorii conſignatum inuenio, vbi antimonii crudi vncias duas ad tredecim drachmas cum ſemiſſe ope ſpeculi cauſtici intra decem dies redactas eiusdemque vnicam vnam duabus drachmis menſuraeque quarta parte igne carbonum imminutam fuiſſe memoratur. Pluribus vero in eadem re factis obſeruationibus concordantibus maior haberi poteſt fides prae vna diſſentiente.

§. 5. *Du Cloſius* * regulum antimonii in marmore tritum atque in tenuiſſimum puluerem comminutum ope ſpeculi vſtorii poſt vnam horam decima priſtini ponderis parte auctum deprehendit, quod experimentum igne carbonum quoque inſtitutum, regulum octaua ponderis parte auctum praebuit. *Hombergus* ope lentis *Sereniſſ. Duc. Orleanenſ.* idem tentamen inſtituens, reguli antimonii martialis puluerisati quatuor vncias, $1\frac{1}{2}$ ped. a vero lentis foco locatas, vnius horae ſpatio, ceſſante nimirum fumo, qui per totam horam inſignis fuit, trium drachmarum et granorum quorundam incrementum ſumſiſſe obſeruauit, imo computo facto poſt reductionem reguli calcinati, qui

 poſt

* Hiſt. A. R. S. L. I. S. II. C. I. §. 2. et 3.
** Memoires 1705. p. 124. et 125.

poſt eam tres ſaltem vncias cum ſemiſſe pendebat, ſex drachmis ſolis radios hunc regulum auxiſſe concludit, quandoquidem ſemiuncia, quae regulo reducto defecit, ea ipſi videatur, quae durante calcinatione fumo perdita fuit. *Kunckelius* * reguli antimonii libram vnam calcinatione ad ſex ſcrupulos, (videtur legi debere ſex drachmas), imo quandoque ad vnciam augeri, menſura vero aliquam partem minui tradit, cui poſteriori *Georg. Erneſt. Stahlius* etiam ſuffragari videtur, cum et rationes, a *Kunckelio* pro ſe adductas in ſuam demonſtrationem trahat. *Vid. eius Experim. et Obſeru. Chym. et Phyſ. p.* 347. In diario ſuperius citato inuenio, reguli antimonii martialis vnciam vnam per calcinationem carbonum igne inſtitutam quatuor ſcrupulos pondere et quartam partem menſura auctam fuiſſe, ſpeculo vero cauſtico idem antimonii pondus calcinatum aliquot dierum ſpatio ſcrupuli vnius incrementum accepiſſe.

§. 6. Ex hisce experimentis concludi poſſe puto: Regulum antimonii calcinatione ponderis ſui augmentum acquirere. De antimonio res probabilis quidem eſt (§. 4.) aſt nondum euicta. Et *Kunckelii* enim et meae obſeruationes ea cura et ſollicitudine inſtitutae non ſunt, qualis hic requiritur. Etſi annotatum non ſit, qualia vaſa adhibuerit *Kunckelius*, id tamen certum eſt, quod ſi adhibuerit ferrea, vti ego, id obſeruationem maxime ſuſpectam

* Chymiſche Tractätlein p. 29.

ctam reddere; haec enim et ab ignis actione et perpetua ſpathae agitatione facilem patiuntur abraſionem, prouti ab aliis iam notatum eſt. Huic damno lapidea vel et fictilia vaſa, imprimis plumbata, obnoxia non adeo ſunt, hiſceque vſum eſſe *Bouleduccium* annotauimus. (§. 4.) Sed nec in huius nec reliquorum, ſolius *Hombergi* exceptis, experimentis gradus ignis, qualis adhibitus fuerit, proditum eſt, cum tamen pro vario ignis gradu et antimonium et eius regulus diuerſimode augeantur. Nec inuenio in experimentis igne carbonum inſtitutis, vllas inſumtas fuiſſe cautelas, ne fauilla carbonum, ſaepius afflatu eorum in aëra ſe diſpergens, vel ſcintillulae igneae, adhaereant calcinandae materiae, ex quo tamen augmentum facile capere poſſet. *Kunckelii* experimenta, (§. 4. 5.) praeter rationes ſupra allatas ideo etiam ſuſpecta ſunt, dum antimonium calcinatione plus incrementi capere ſcribat, ac regulum antimonii, quod omnium reliquorum experimentis contrariatur. Finis etiam calcinationi aſſignandus eſt, „Si enim diutius, ac requiritur, calcinatione vrgeas haec corpora, etſi antea augmentum capeſſerint, decrementum notabile poſtmodum rurſus patiuntur; ſi breuius, augebuntur quidem pondere, aſt quantum, tunc ignorabis, quia plus adhuc augerentur, ſi calcinatione vlterius inſiſteres. Hanc cautelam a *Hombergo* obſeruatam ſuperius recenſitae (§. 5.) teſtantur obſeruationes. Interim hanc obſeruandi negligentiam rationem eſſe diſſenſus memoratorum experimentorum coniectura facili aſſequi licet.

§. 7. Ex augmento, quod haec corpora calcinatione capiunt, concludimus, aliquid iis acceſſiſſe. Cum vero nihil in hac operatione addatur, quod ſub ſenſus incurrit, praeter ſolarem vel carbonum ignem, ideo plurimis haec concluſio placet, particulas quasdam igneas, vel materiam quandam ſubtilem, vel, vt alii exprimunt, Φλογιςὸν quid acceſſiſſe. Hasque particulas ſulphureas maxima pars exiſtimat. Sed vtraque res dubia eſt. Nunquam talis calcinatio in vaſe aëre vacuo inſtituta fuit, etſi *Boyleus* quoddam recenſeat experimentum, vbi eam in vaſe clauſo peregit. Quam facile eſt, vt particulae hinc inde in aëre volantes adhaerere poſſint antimonio, illudque repraeſentare, quod *Du Hamelio* l. c. ſub fibroſorum corpusculorum nomine venit. Conceſſis vero particulis igneis, de quibus hactenus ſaltem dubitamus, disquiremus, an eas ſulphureas appellare liceat? Notum eſt, in reductione calcium metallicarum hanc cautelam tradi, vt ad eam promouendam puriſſima alcalia haud ſeligantur, ſed ea, quae ſulphureo principio abundant, e. g. impurum ſal Tartari, vel et Tartarus ipſe, ob hanc maxime rationem, quod ſulphureum principium calcinatione auolauerit, idque reſtitui debeat. Particulas vero ſulphureas nouas acceſſiſſe, et auolaſſe priſtinas, hypotheſium amorem ſapit. Nec quicquam roboris particulis his ſulphureis addit experimentum *Du Hamelii* l. c. productum, quod ſpiritus vini calcinato antimonio (videtur ex aliis circumſtantiis, regulum anti-

antimonii intelligere Cel. Autorem) affuſus poſt aliquam digeſtionem rubram Tincturam ex eo decerpat, antimonium vero remaneat eiusdem prorſus ponderis atque erat ante calcinationem. Oporteret iuxta hypotheſinCel. Viri antimonium (vel regulus) poſt hanc extractionem ponderis eſſe minoris ac ante calcinationem, quia durante calcinatione magna pars fumo perdita fuit. Vel igitur experimentum in dubium vocari poterit, vel particulae hae igneae non omnes ſunt ſulphureae, eae nempe non ſunt, quae poſt Tincturam a Spiritu extractam remanſerunt. Sed cum particulae igneae adeo ſimplices ſint, vt dubitari de earum exiſtentia poſſit, quomodo compoſitae comprehendi poterunt? Quidni liceat Tincturam hanc a ſulphure reguli antimonii particulis quibusdam abſcondito, per calcinationem vero ſui iuris facto, deducere? Nec enim calcinato antimonii regulo omne ſulphur denegari poteſt, quandoquidem egregii Viri vim eius emeticam a ſubtili quodam et narcotico ſulphure deriuant.

§. 8. Alii particularum ignearum oſores, aliam rationem augmenti huius quaeſiuerunt. *Kunckelius* enim exiſtimat, corpora poroſa ſuspendi quaſi ab aëre, hinc leuiora reddi, magis vero compacta comprimi et ita grauiora fieri. Antimonii vero regulum magis compactum eſſe poſt ac ante calcinationem exinde probat, quod menſura eius poſt calcinationem minor ſit. Actionem aeris ex

 me-

metallorum in aqua et aëre penſorum collatis ponderibus elucere putat; pluraque pro defenſione hypotheſeos ſuae affert experimenta, quorum inſignius hoc eſt: Catinus probatorius, ſi vel vehementiſſimo igne torqueatur, pondere non augebitur; quam primum vero plumbum ei impoſitum intra poros ſuos recepit, plus ponderabit, ac plumbum et catinus ſeorſim penſa. Poros igitur catini cum plumbo repletos conceſſiſſe aëre inquit, vt corpus catini, quod hac ratione magis compactum eſt, comprimat, hincque pondere augeat. Sed omnia haec dubiis obnoxia ſunt. Contrariam de menſurae imminutione, quam praetendit, obſeruationem in ſuperioribus (§. 4.) allegaui; Huicque maiorem adſcribo fidem, quod *Boyleus* afferat, * plumbi, ſi per ignem calcinetur, grauitatem abſolutam augeri quidem, ſed ſpecificam minui. Vtraque tamen obſeruatio in hoc etiam deficere videtur, quod modus, quo menſurae vel augmentum vel imminutio notata fuere, haud deſcribatur. Si enim is per vaſculum quoddam celebratus ſit, tum vel maior vel minor quaſſatio vaſis, et vel maior vel minor ſubtilitas atque teneritas menſurandi magnam differentiam inferre potuerunt. Experimentum inſuper, quod *Kunckelius*, ceu maxime ſtringens, pro ſe adducit, eam vim habere vix veriſimile eſt. Vt haud vrgeam, quae de catino probatorio vehementiſſimo etiam igne pondere non augendo adducit et *Boy-* inſti-

* Deteƈt. penetrab. vitri exp. III.

lei * obſeruationi accuratiſſimae et ſumma cura inſtitutae contraria plane ſunt, id ei vehementius aduerſatur, quod et plumbum iuxta proprium eius aſſertum et *Io. Freindii* ** obſeruationes calcinatione grauius euadat. Ab hoc igitur catini ſui augmentum maiori compendio et perſpicuitate deriuari poterit. Actio aëris in reſpectu ad grauitatem labili nititur fundamento. Aliam ſine conſideratione aëris norunt Phyſici allegare rationem imminutionis grauitatis corporum in aqua.

§. 9. Tantis igitur, cum ea, quae hactenus recenſuimus, dubiis obnoxia ſint, experimenta ita adornare neceſſe eſt, vt vel in veriſimilem quandam, vel ſi fieri poteſt, perſpicuam atque certam rationem aliquando penetrare liceat. Ignis carbonum huic ſcopo non conuenire videtur, quod exceptio poſſit fieri, augmenti rationem in corpuſculis forte carbonum ſitam eſſe. (§. 6.) Ideo ſolaris ſeligendus, illo nimirum purior.

§. 10. Vt cauſa augmenti innoteſcat, calcinatio in vacuo inſtituatur. Si enim et tum augmentum capiant corpora, iuſta omnino eſt concluſio, particulas igneas id effeciſſe. Sed cum corpus calcinandum durante calcinatione perpetuo agitari et vt vera ratio augmenti innoteſcat, ſubinde ſtatera examinari debeat, iis difficultatibus et in vacuo obuiam eundum.

§. 11.

* Exp. de flammae ponderab. Exp. VIII. ** Prael. Chym. p. 14.

§. 11. Pro perpetua agitatione concilianda inſtrumentum ſelegi, quo alias motus in vacuo perfici ſolet, loco vero brachii, qui alias inferiori extremitati connexus eſt, orbem quendam minorem pluribus aculeis vel cuſpidibus orichalceis in extremitate ſua rotundiuſculis adaptare curaui. Alterae difficultati ita ſuccurri poterit. Catinus antliae, campana et omnia, quae ad corpus calcinandum non pertinent, attamen pro calcinatione in vacuo inſtituenda neceſſaria ſunt, ſtatera antea pendantur. Sic, vtut aëris acceſſus haud admittatur, corporis ſubinde incrementum diiudicari poteſt, ſtatera penſis omnibus ſimul detractoque pondere eorum, quae non ipſum corpus calcinandum conſtituunt.

§. 12. Cum vero catinus antliae non poſſit a cylindro eius in machina *Leupoldiana* ita ſeparari, vt manente vacuo, in orbem verti non debeat, quae verſio materiam calcinandam in catino vndiquaque diſpergeret, ideo cylinder antliae ſimul cum catino et campana appendi neceſſe eſt. Sed tum ad aliquot grana certi eſſe non poſſumus, quia ſtatera ingens requireretur. Ideo fieri curaui tubum orichalceum, 3. circiter pollic. Angl. longum, cui inferne cochlea foemina et ſuperne cochlea mas, inque medio epiſtomium, adaptata ſunt. Cochlea foemina recipit cochleam marem tubuli ex cylindro antliae prodeuntis, et mas recipitur a cochlea foemina catini. Mediante hoc tubo

tubo catinum ita a cylindro antliae ſeparare poſſum, vt erectus ſemper maneat, vacuumque in campana conſeruetur; eo ipſo vero pondus eorum, quae ſtatera pendenda ſunt, multum decreſcit, et licet et tunc de minimis grani partibus certiores eſſe non poſſimus, de integris tamen certiores eſſe poſſe confidimus. Hanc rationem quantum corpora calcinatione augeantur, felicius adhuc eruemus, ſi fumi calcinatione auolantis collectionem inſtituamus; collectum enim additum ponderi corporis calcinati iuſtam demum rationem ſuppeditabit. Reliquae, quae neceſſariae videntur cautelae, partim ex ſuperioribus eruendae, partim adeo arduae non ſunt, vt hic memorentur, partim cum inſtituentur, demum ſeſe prodent. Ea vero proximae aeſtati reſeruo.

AD GRAVITATIS LIQVORVM DIFFERENTIAM COGNOSCENDAM.

AVTORE

J. G. Leutmann.

§. I.

FIat inſtrumentum vitreum A, eius globus vitreus-infimus (*a*) plumbo comminuto ad tertiam, et quod excurrit, partem repleatur, vsque dum inſtrumentum A in vitro aqua repleto mergatur ad (*b*) circiter. Iniiciatur cera raſa Tabula XI.

raſa in bullam inſtrumenti (*a*), et ita diſponatur plumbum, vt in aqua natans inſtrumentum tubulum (*c*) perpendiculariter erigat. Tunc caute eximatur ex aqua, ne plumbum alium ſitum occupet, et admoueatur igni, vt cera liquefacta, et iterum refrigerata, inuoluat et contineat plumbum, quo minus alium ſitum aſſumat.

§. 2. Inſtrumenti A tubulus (*c*), habeat brachium dependens (*d*), ſolido ex vitro, tantae longitudinis, vt eius extremum (*g*) etiam in leuiſſimo liquore, e. gr. Spiritu Vini alkahol. non attingat ſuperficiem.

Deinde paratus ſit tubulus (*f*), in inferiore parte clauſus. Is imponatur in inſtrumentum A, vt ceram coagulatam attingat. Inſtrumentum immittatur in vitrum aqua repletum, et iniiciatur in tubulum (*f*) tantum plumbi, donec brachium (*d*) ſuperficiem aquae lambat, poſtquam extremum (*g*) pinguedine aliqua fuerit illinitum.

§. 3. Poſtea eximatur inſtrumentum A, et in liquorem alium priore grauiorem, e.g. aquam ſalſam, immittatur, et quia brachium (*d*) propter altius natans inſtrumentum, non attinget ſuperficiem aquae, iniiciantur ponduſcula cylindriaca orichalcea, exacte ad trutinam docimaſticam librata, tot, quot requiruntur, vt brachium (*d*) ſuperficiem liquoris etiam lambat.

§. 4.

§. 4. Tandem ponduscula eximantur, et grauitates eorum, in ipſis ſignatae, colligantur, et apparebit, quanta inter vtrasque aquas ſit differentia ſpecifica grauitatis.

§. 5. Si vero experiri cupias, vtrum differentia liquorum, per iſtrumentum inuenta, reſpondeat proportioni, quae indicatur a bilance, ad quam liquor vterque libratus eſt, hoc modo age:

§. 6. Aſſumatur lagena vitrea A, cui embolus vitreus (*b*) ita terendo aptatus eſt, vt ad tertias repleta lagena ſpiritu vini, ſi inuerſo modo ſtatuatur in loco, ſoli, vel calori ad fornacem expoſito, per 12. horas, expanſus per ſolis calorem liquor, et aër, ne guttulam quidem exprimere valeant de Spiritu Vini, in embolum incumbente: id quod indicio erit exacte clauſae lagenulae.

§. 7. Tunc repleatur lagena liquore aliquo librando, vsque ad ſummum, imprimatur embolus, vt ſuperfluat liquor, abſtergatur linteo, et libretur ad bilancem mediocrem, ſed celerrimam, qualis mea, quae 5. libr. aggrauata adhuc $\frac{1}{4}$ graen. ſuperpondii indicat, et colligantur pondera. Hoc etiam inſtituatur cum altero liquore, eodem modo, et ponderum differentia indicabit differentiam liquorum ſpecificam.

§. 8. Deinde, eodem tempore, liquores eaedem, quae in lagena fuerunt, examinentur per inſtrumentum antea deſcriptum, et inuenies, quod concordet proportio differentiae grauitatis ſpecificae, vtroque modo quaeſita inter binos liquores.

 §. 9.

§. 9. *Magnus Hombergius* egregium etiam dedit modum, quo mediante idem volumen diuerſorum liquorum obtineatur. Scilicet lagenulam vitream A, cum praecedente tubulo breuiori (*b*), quam lagenulae collum (*a*) eſt, adornauit. Per hunc infuſi liquoris tantum effluit, quantum tubulus (*b*) permittit, et ſic idem volumen liquoris remanet in lagenula, qualiscunque etiam is fuerit.

§. 10. Mihi vero aptior videtur modus a me propoſitus, cum lagena embolo clauſa, quia *Hombergii* inſtrumentum poſtulat ſitum in plano horizontali I, vt id perpendiculariter erigatur. Decliui enim in plano poſitum II. aut plus liquoris remanet in lagenula, aut minus III, prout ſitum fuerit nacta. Et quanquam exigua percipiatur differentia, tamen aliqua inuenitur, libratis liquoribus ad bilancem exactam.

§. 11. Deinde clauſum mea methodo vitrum vna cum liquore librari poteſt, ſine effuſionis metu, et grauitas vitri ſubtrahi: quod ad plura experimenta valde vtile atque commodum inueni.

DE

DE SALIBVS ALKALIBVS FIXIS PLANTARVM.

AVTORE

J. G. Gmelin.

§. 1.

EX quo vſus ſalium fixorum plantarum in Medicina inualuit: ex eo tempore varie diſceptatum eſt, an ſalia fixa a diuerſis plantis acquiſita re ipſa diuerſa ſint, nec ne; et ſi differant, in quanam re haec differentia conſiſtat. Nec vero haec lis in hunc vsque diem diremta. Vt enim multus de hoc ſermo fuerit, is in opinionibus tantum verſatus eſt, nec vllo experimento ſolide exactus. Quo magis arduum videtur, rem penſitare altius. Id et Medicae artis intereſt, cum plures ſint, qui differentiam ſalium fixorum plantarum nauci habentes promiſcue ſingula praeſcribunt ſine delectu, alii, qui eam inſignem credentes, vbi delectum inſtituunt, non ſine mordacis conſcientiae ſtimulis aegris propinari poſſe credunt.

§. 2. Salia fixa ſunt ſalia ſui generis, notisque gaudent, quibus facile ab aliis diſtinguuntur. Quodſi ergo pura ſint, ea ſemper eadem eſſe oportet. Pura rariſſime obtinentur, niſi calcinatione eorum

intenſius inſtituta, et ſaepius poſt nouas ſolutiones repetita. Talis vero in praeparatione ſalium plantarum non adhibetur, vel rariſſime. Ergo ea impura vt plurimum eſſe oportet.

§. 3. Generalis obſeruatio eſt, id, quod ſalia fixa impura reddit, eſſe vel terreſtre quid, vel pingue, vel acidum, vel et nonnunquam alcalinum volatile. Prout corpora, e quibus extrahuntur, vno horum abundant, vel prout nexus horum omnium obtinet, ea ratione hoc magis quam illo abundant. Quodſi igitur plantae diuerſae diuerſae quantitatis obtinent principia, neceſſe eſt, vt et ſalia fixa exinde elicita diuerſa ſint. Illud vero ex analyſi conſtat.

§. 4. Haec differentia ex indole Plantarum diuerſa fluit. Fateor, multas accedere poſſe cauſas, differentiam hanc naturalem augentes. Eadem planta diuerſo igne combuſta diuerſum ſal alcali exhibebit. Si ex eorundem cinerum dimidia parte lixiuium aqua feruida, ex altera vero frigida extrahatur, diuerſum orietur ſal. Haec omnia G. E. *Stahlius* * praeclare et abunde docet. Sed huius loci non ſunt; differentiam enim ſalium fixorum plantarum eſſentialem, non accidentalem et ab ingenio artificis pendentem demonſtrare animus eſt.

§. 5. Vt igitur ſalia fixa inter ſe comparentur, opus eſt, vt eodem modo ex plantis extracta ſint, nimirum, vt idem ad ſenſum ignis gradus, idem-

* Fundament. Chym.

idemque certus quidam in combuſtione plantarum obſeruetur, vt combuſtio ad certum vsque ſtatum continuetur, atque lixiuium eodem et vniformi modo ex cineribus plantae paretur. Impediemus prima et ſecunda cautela, vt partium volatilium in vna planta, caeteris paribus, non plus auolet, quam in altera; per tertiam curabimus, vt ſulphurearum et terrearum partium plantae aequalis fiat ſolutio: feruida enim aqua extractum lixiuium plus ſulphurearum et terrearum partium continebit, quam tale, quod frigida extractum eſt. Ita vero facile fit, vt plantae eaedem diuerſa quantitate principia exhibere poſſint.

§. 6. Certi hi gradus determinandi ſunt. Cum ſalia plantarum vſui tantum Medico hactenus adaptata ſint, ſcopus a Medicina intentus in praeparatione eorum ante oculos habendus eſt. Is vero duplex videtur. I. Vt humores corporis ſalino ſuo principio alterando in priſtinum eos redigant ſtatum. II. Vt, ſi poſſibile, etiam agant in corpus humanum ſpecifica plantae, e qua extracta ſunt, virtute. Curandum ergo eſt, vt volatiles partes, quantum penes artificem eſt, ab auolatione praeſeruentur, et ſulphureae moram acquirant, vt ſali fixo ſe aſſociare queant, ne ante hanc copulam diſſipentur. Fieri enim poteſt, vt, ſi quid ſpecificum in planta, id vel volatilibus vel ſulphureis partibus intricatum cum illis in auram abeat, quod remaneret, ſi gradus ignis remiſſior adhibitus fuiſſet. Optima igitur methodus eſt, ſi plan-

plantae ita comburantur, vt in luculentam flammam non erumpant, ſed gliſcant tantum. Hoc tamdiu continuandum, vsque dum in cineres fatiſcant, nec calcinatio vlterius protrahenda, ne perditio partium volatilium vel ſulphurearum nimia fiat.

§. 7. Salia ex cineribus cum frigida extrahi debent, vt veri ſalis formam induant. Cumque aquae fontanae, fluuiales, puteales, pluuiales &c. ſpeciesque vnius generis multum inter ſe differant; vt ex tentaminibus iuſtae fieri poſſint concluſiones, cum aqua aliquoties deſtillata lixiuium extrahendum eſt, idque in vaſe vitreo vel terreo non plumbato, ne vlla ſuspicio ſuperſit, aliquid heterogenii ſali admiſtum fuiſſe. Si omnibus his obſeruatis cautelis lixiuia plantarum inter ſe differunt, certum eſt, ſalia eorum fixa differre.

§. 8. Auſpicato incidit in manus meas Diarium laborum Chymicorum, Regis Sueciae auſpiciis inſtitutorum, manuſcriptum, vbi omnes hae cautelae in diuerſis plantis obſeruatae fuerunt. Singulae plantae, vnaquaeque in ſuo catino inter prunas candentes poſito, lente et eo vsque combuſtae ſunt, donec in cineres dilapſae fuerint, nullo carbonum relicto veſtigio. Cineribus poſtea in vitro puro locatis aqua ſimplex deſtillata affuſa, haecque, vbi aliquod tempus ſuper eos relicta erat, diuerſis liquoribus permixta fuit. Taedioſum eſſet, diuerſa phaenomena, quae euenerunt, prouti relata

lata ſunt, huc transſcribere; imprimis, cum Diarium germanico idiomate conſcriptum ſit. Maxime opportunum autem viſum eſt, tabellam formare, ex cuius primo intuitu tota differentia phaenomenorum, quae cum diuerſis ſalibus obuenerunt, pateſceret. Hanc igitur hic offero. Praeciſa colorum ſignificatio, quam germanico idiomate habent, cognita et probe perſpecta mihi eſt. Vt latinis eos exprimam nominibus, ſecutus ſum *Vrbani Hiernii* App. de coloribus, Paraſceui ſuae 1712. impreſſae adiunctam. Qui vero hoc Tractatu non indicati ſunt, donec haec doctrina diffuſior tradatur, ita nominaui, vt ideam ſatis claram eorum habiturum confidam, qui vel ſola nomina legat. Plantae, e quibus ſalia memorati Diarii extracta fuerunt, ſine dubio omnes officinales ſunt, vt opus haud fuerit, integrum earum ex Botanicis Autoribus adponere nomen. Exſiccatae etiam probe fuerunt, nam Menſ. Decembr. demum combuſtae ſunt. Folia ſola plantarum adhibita fuerunt, ſi excipias Carduum benedictum, cum toto, Tanacetum, Melilotum et Saxifragiam vna cum floribus aſſumpta, et Chamomillam cum floribus et ſtipitibus.

§. 9. Cum lixiuia diuerſarum plantarum cum iisdem liquoribus diuerſa phaenomena exhibuerint, experimentis comprobatum eſt, ſalia fixa inter ſe differre. Confirmatur haec differentia ex diuerſitate cinerum, e quibus ſalia elixiuiata ſunt, et

lixiuiorum ipſorum, ſenſibus nudis patente. Color cinerum Artemiſiae, Centauri minoris, Chaerefolii, Anethi, fuſco-cinereus erat; Barbae Caprae, Pulmonariae, albus; Saniculae, candicans; Abſinthii pontici, ex albo et viridi cinereus; Rutae, Agrimoniae, Saxifragiae, ſubfuſcus; Tanaceti, obſcure viridis; Cuſcutae, viridis; Euphraſiae, Abrotani, Abſinthii vulgaris, Scabioſae, cinereus; Cochleariae, ex albo cinereus; Hyſſopi, Millefolii, Anſerinae, obſcure cinereus; Meliloti, Quercus foliorum, Plantaginis, Farfarae, ſummitatum Pini, Fumariae, obſcure fuſcus; Marrubii lucidior paululum; Pulegii, lucide fuſcus, albis maculis intermixtis; florum Sambuci, Saluiae nobilis, Serpilli, luteſcens; Fragariae, ſulphureus; Nepetae, obſcure rubens; Prunellae, obſcure lateritius; Matriſyluae, coeruleſcens; Filicis, nigricans; Hyperici, Matricariae, Origani, Pimpinellae, niger.

§. 10. Pondus cinerum, ad plantarum pondus exactum, inaequale erat. Pulmonaria paulo minus quam ſeptimam partem cinerum exhibebat; Cardui benedicti folia, paulo minus praebuerunt, quam nonam; Tuſſilaginis, nonam fere; Plantaginis, paulo minus quam vndecimam; Pulegii, minus; Nepetae, Matriſyluae, duodecimam; Marrubii paulo minus; Serpilli, minus quam decimam tertiam; Fumariae, plus; Tanaceti, minus quam decimam quartam; Abſinthii pontici, Cochleariae, florum Sambuci, plus; Barbae Caprae, Prunellae, minus quam decimam quintam; Cuſcutae, Meli-

loti,

EXHIBE ...RVM ADMIXTIONE INDVCTAE FVERVNT.

	A Sale ... tani.	A Eu-... ae.	A Sale Tuſſilaginis.	A Sale Fumariae.	A Sale Hyſſopi.	A Sale Matriſyluae.	A Sale Hyperici.	A Sale Marrubii.
Spiritus Vitrioli.	efferueſcit ſubfuſco ... to colore ... gitur.	effer-	parum efferueſcit.	fortiter efferueſcit.	fortiter efferueſcit et luteſcentem colorem acquirit.	fortiter efferueſcit.	efferueſcit.	efferueſcit et obſcurior euadit.
Spiritus	efferueſcit limpidus				fortiter efferueſcit et luteſcentem colo-			

loti, Saxifragiae, Saluiae nobilis, Fragariae, plus; Abſinthii vulgaris, Anſerinae, Artemiſiae, Chaerefolii Romani, Euphraſiae, Rutae, Scabioſae, decimam ſextam; Matricariae, minus; Agrimoniae, minus quam decimam ſeptimam; Hyſſopi, minus quam decimam octauam; Abrotani, Chamomillae, minus quam decimam nonam; Trifolii fibrini, minus quam vigeſimam; Anethi, Pimpinellae, Quercus, minus quam vigeſimam vnam; ſummitates Pini, minus quam vigeſimam tertiam; folia Centaurii minoris, Filicis, vigeſimam quartam; Origani, minus quam vigeſimam ſeptimam; Hyperici, minus quam vigeſimam octauam. Raritas vero cineribus eadem erat, exceptis cineribus Chamomillae, qui ſatis compacti videbantur.

§. 11. Lixiuia limpida fuerunt. Cineres quidem Anſerinae, Trifolii Fibrini, Cuſcutae, Matriſyluae, herbeum aquae adfuſae ab initio colorem; Cochleariae, Euphraſiae, coeruleum ſubuiridem; Saxifragiae, Saluiae nobilis, Tanaceti, lucide viridem conciliarunt. Ii vero colores intra aliquot dies euanuerunt, limpidis relictis lixiuiis.

§. 12. Lixiuia Anſerinae, Matriſyluae, Hyſſopi, Plantaginis, Pulmonariae, peracria erant; Marrubii, Matricariae, Saxifragiae, Scabioſae, Saluiae, florum Sambuci, Prunellae, Tanaceti, Pimpinellae hortenſis, Abrotani, Nepetae, Cardui benedicti, Millefolii, Trifolii fibrini, Origani, Anethi,

thi, Meliloti, Artemiſiae, Rutae, Saniculae, Cochleariae, Fumariae, Cuſcutae, acria; Filicis, Abſinthii vulgaris et pontici, Agrimoniae, Centaurii minoris, Chamomillae, Chaerefolii, Pulegii, Euphraſiae, Quercus, mediocriter acria; Hyperici, Tuſſilaginis, ſubacria. Sapore vix vllo gaudebat lixiulum Fragariae, et lixiuium Barbae Caprae loco acredinis dulcedinem guſtui offerebat, ſed nullus plane ſapor dignoſci poterat in lixiuio Serpilli.

§. 13. Pimpinellae, Anethi, Fragariae, lixiuia ſulphureum odorem ſpirarunt; reliqua inodora erant.

§. 14. Praeter Phaenomena, quae in tabella continentur, ſequentia adhuc obſeruata ſunt: ſal Filicis ſolutionis Vitrioli Martis colorem exaltat, infuſionem vero ſucci Heliotropii non mutat, at Syrupum Violarum praſſino diluto colore tingit. Sal Origani ſolutionem ſcoriarum reguli Antimonii rubro colore tingit; ſal Plantaginis eandem ſolutionem colore intenſiorem reddit, in vtroque tamen caſu diaphana manet. Sali Matricariae ab eadem nullam mutationem patitur.

§. 15. De differentia ergo ſalium fixorum plantarum dubitare non licet. Difficilius eſt determinare, in quo differant. Cum praeter terram, vel pingue, vel acidum, vel alkali volatile, ſalibus plantarum nihil admiſceri ſoleat, (§. 3.) ideo non opus eſt, vt plura experimenta inſtituantur,

quam

quam quae ſufficientia ſint, horum praeſentiae vel abſentiae, copiae vel paucitatis detegendae. Sufficientia igitur ſunt experimenta et obſeruationes recenſitae. Dubitare enim licet, an ferrum in cineribus cuiusuis plantae, ex obſeruationibus *Geoffroy*, praeſens, ſali etiam ſeſe inſinuet atque cum eo ſoluatur. Praeter difficultatem, quam alcalia ſalia habent in ſoluendo ferro, id phaenomenon contrarium eſt, quod ferrum in cineribus plantarum Magnetis ope demonſtrari poſſit, quod fieri haud poſſet, ſi ferrum vel acido quodam vel ſulphureo ſolutum eſſet.

§. 16. Ex phaenomenis in tabella recenſitis euidens eſt, ſalia omnia, quotquot ibi memorantur, ſalium fixorum notis gaudere, praeter ſolum ſal Filicis, ſocietatem vegetabilem igne reſpuens. De hoc vero poſtea.

§. 17. Salia Abſinthii vulgaris et pontici, Hyperici, Euphraſiae, Quercus, Artemiſiae, Nepetae, Saxifragiae, Matriſyluae, ſunt ſalia alcalia fixa, terreſtri materia diuerſimode temperata. Salia alcalia, quo plus terrae et ſulphuris continent, eo minor acor eorum eſt. Quae igitur ſulphur non continent, nec acore magno praedita ſunt, ea multum terrae continere certum eſt. Id phaenomena, quae cum ſalibus Abſinthii vulgaris et pontici, Hyperici, Euphraſiae, Quercus, euenerunt, confirmant. Et ex diuerſis efferueſcentiae gradibus, quos haec

ſalia cum ſpiritu Vitrioli ſubierunt, patet, ſalia Euphraſiae et Abſinthii vulgaris maiori terrae copia foeta eſſe, ac ſalia Hyperici et Quercus, haecque maiori, ac ſal Abſinthii pontici. Salia Artemiſiae, Nepetae, Saxifragiae, cum acriora ſint, minus terrae continebunt, et ſal Matriſyluae, cum acerrimum ſit, minus adhuc. Id quidem omne phaenomenis conſonum eſt.

§. 18. Quale id ſal Hyperici fuerit, de quo *Du Hamelius*, * illud ſolutionem Mercurii *ſublimati* lacteo colore praecipitaſſe, diuinare neſcio; an forte eſſentiale fuerit? Id vero ob alias circumſtantias concludere haud licet; an diuerſum ſal Hyperici gallici a ſuecico, vti ſal commune gallicum diuerſum ab hiſpanico?

§. 19. Salia Agrimoniae et Chaerefolii ſunt alkalia fixa, forte pauco alkali volatili imbuta. Id ex phaenomenis, quae in ſolutione Vitrioli Veneris occurrunt, elucere videtur. Nollem tamen nimis praeceps in hanc concluſionem ruere. Forte colores non rite nominantur, nam phaenomena ſibi nonnunquam contrariantur; deinde in ſublimati ſolutione nullum volatilis indicium habetur. Res ergo anceps eſt, et eodem iure haec ſalia ad ea referri poſſunt, quae §. 17. deſcribuntur. Multa terra vtrumque gaudet, Chaerefolii tamen minori quam Agrimoniae.

§. 20.

* Hiſt. Ac. Sc. ed. Par. 1701. p. 77.

§. 20. Salia Anſerinae, Tuſſilaginis, Plantaginis, Pulegii, Tanaceti, Centauri minoris, Barbae Caprae, ſunt alkalia fixa, pauco acido refracta. Cum ſalia Plantaginis et Anſerinae cum ſpiritu Vitrioli, illud ne hilum quidem, hoc parum efferueſcat, atque ſublimati ſolutionem illud ſubcroceo, hoc obſcure flauo colore praecipitet, multo acido foeta ſunt. Illud plus acidi habet, quam hoc, hoc vero plus quam ſal Tanaceti, hoc plus quam ſal Tuſſilaginis, hoc denique plus, quam ſal Pulegii. Hanc maiorem in ſale Plantaginis copiam ſolutio etiam ſcoriarum reguli Antimonii indicauit, quae cum nullo reliquorum vel vllam mutationem ſubiit. Sal Barbae Caprae ſalis tartarei particeps eſſe videtur. Phaenomena quidem non diſſentiunt, dulcedo vero eius id ſuadet. Cum porro ſalia Plantaginis et Anſerinae acerrimo ſapore gaudeant, minorem terrae copiam, ſalia Tanaceti, Tuſſilaginis, Pulegii, Barbae Caprae, et Centaurii minoris maiorem continere debent. Hancque copiam terrae in cauſa fuiſſe, cur eadem ſalia cum ſolutionibus ſulphureis nullam mutationem ſubierint, admodum veriſimile eſt.

§. 21. Salia Abrotani, Cardui benedicti, Hyſſopi, Pimpinellae, Rutae, Cuscutae, Prunellae, Serpilli, Matricariae, ſunt ſalia alkalia fixa, ſulphure foeta. Sulphur, quod continent, diuerſimode manifeſtatur. Salia Abrotani et Cardui benedicti ſpiritum Vitrioli, hoc obſcuro flauo, illud ſubfuſco diluto colore tingunt, ſolutio vero Lunae albo inde

prae-

praecipitatur colore. Ex altera igitur parte ſulphur adeſſe indicatur, ex altera eius praeſentia negatur. Et vice verſa, ſalia Cuſcutae, Prunellae, Serpilli ſulphur ſuum per ſolutionem Lunae produnt, in ſpiritu Vitrioli ne halitum ſulphureum indicantia. Tandem ſalia Hyſſopi, Pimpinellae, Rutae et Matricariae et ſpiritum Vitrioli et ſolutionem Lunae indices ſulphuris ſui agnoſcere debent. An igitur diuerſae indolis ſulphura? Id *Hombergus* et *Hiernius* pluribus experimentis edocti faſſi ſunt, etſi in hunc vsque diem plures adhuc reclament. Haec differentia vero in delicatis experimentis tantum agnoſcitur. Quis rudis artifex norit, Cupra, Ferra, Antimonia, vbi experimenta chymica cum iis inſtituuntur, inter ſe diuerſa eſſe? *Boyleus* tamen ſe experientia id addidiciſſe fatetur. *Hombergus* inter ſulphur vegetabile ſeu animale, bituminoſum et minerale diſtinguit.* Primum rudioribus particulis conſtare aſſerit, tertium ſubtilioribus, ſecundum mediae naturae eſſe inter primum et tertium. Haec ingenioſus Vir ad explicandam aquarum regalium et fortium actionem. *Hiernius* ſermonem alio modo flectit; vterque agnoſcit, ſulphura ſpecie diuerſa dari. Exiſtimo igitur, ſalia Abrotani et Cardui benedicti minerale ſulphur fouere, illud quidem in maiori copia quam hoc; ſalia vero Cuſcutae, Prunellae, Serpilli, vegetabile ſolum vel animale, prius maiorem copiam quam poſterius, hocque maiorem ac

* Memoires de l' Academie des Sciençes 1702 p. 49. ed. Bat.

ac ſal Prunellae; tandem ſalia Hyſſopi, Pimpinellae, Rutae et Matricariae bituminoſum ſulphur, ſiue ſulphur mediae naturae inter vegetabile et minerale, duo poſteriora quidem in maiori copia, ac priora. Hyſſopi et Rutae ſalia minorem terrae copiam gerunt, ac ſalia Pimpinellae et Matricariae. Mirari tamen licet, ſal Pimpinellae, etſi minorem prae reliquis ſulphuris eiusque ob copioſam terram magis diluti quantitatem foueat, vbi ſolutum erat, odore ſuo ſulphur indicaſſe, quod reliqua maiori quantitate ſulphuris et pauciori terra foeta non fecerant. Sal Serpilli multa terra abundat, quod et ex eius inſulſo ſapore diiudicari poteſt.

§. 22. Sal Fumariae eſt alkali fixum, ſale communi foetum. Id conſtat ex ſolutione lunae, quae ſeri lactis inſtar praecipitata eſt. Terrae parum continet.

§. 23. Sal Marrubii ſulphure quodam minerali et ſale communi ſcatet.

§. 24. Salia Trifolii fibrini, Chamomillae, Meliloti, Pulmonariae, Fragariae, florum Sambuci iuxta ſulphureum principium acido aliquid participant. Ex colore cinerum flor. Sambuci et Fragariae (§. 9.) ſulphuris praeſentia iam indicatur, imo lixiuium Fragariae odore ſuo, id manifeſte monſtrauit. Salia Sambuci, Fragariae et Trifolii fibrini quoad copiam ſulphuris primo lo-

co ſtant, poſtea ſalia Meliloti, Pulmonariae, Chamomillae. Quoad acidi copiam primum locum obtinet ſal Fragariae et florum Sambuci, poſtea Pulmonariae, Meliloti, Chamomillae, Trifolii fibrini. Mutationes colorum in ſpiritu Vitrioli et ſolutione Lunae hunc in finem ſaltim conſulendae. Sed quae paradoxa hic? Fragariae ſal vix quodam ſapore gaudet, attamen plus efferueſcit, quam ſalia Meliloti et florum Sambuci acria, et ſal Pulmonariae peracre. At ex prioribus reſponderi poſſe exiſtimo. Quo minus ſalia heterogeneis corporibus foeta ſunt, eo magis acria ſunt. Et vice verſa. Iam vero palam eſt, Fragariae ſal prae omnibus reliquis multo ſulphure ſcatere. Hoc obtunditur ſal; hinc et ſapor fere perit. Verum hoc non impedit, quo minus Vitrioli ſpiritus cum ſale colluctetur. Impedit ſaltem, ne eo gradu colluctetur, ac ſi ſulphur abſens vel eius copia minor fuiſſet. Hinc et ſal florum Sambuci fortius efferueſcit. Salia Trifolii fibrini, Chamomillae, Meliloti, iuxta ſulphur terram multam continere videntur, Chamomillae tamen minus quam reliqua. Sal Pulmonariae bituminoſi ſulphuris notas exhibet, idem vero exigua quantitate adeſt, e contra acidum ſal inibi copioſe continetur. Id quidem acorem non impedit, ſed efferueſcentiam minuit, conformiter phoenomenis.

§. 25. Salia Origani, Millefolii, Pini, Scabioſae, Saluiae, Anethi, Saniculae, ſunt Alkalia fixa, ſul-

phure

phure foeta et pauxillo alkali volatilis. Salia Origani et Millefolii in omnibus circumſtantiis prope eadem ſunt, ſaltim Origani ſal ſulphuris bituminoſi, ſal vero Millefolii ſulphuris mineralis indicia praebet. Et quoniam ſolutio ſcoriarum Reguli Antimonii a ſale Origani in rubrum colorem mutata eſt, et ſolutio ſublimati in obſcure flauum, aliquid etiam acidi ſali Origani ineſſe patet. Salia Pini, Scabioſae, Saluiae, vix a ſe inuicem differunt, ſulphure abundant bituminoſo, et priores ſulphuris copia multum ſuperant.

§. 26. Salia Anethi et Saniculae ſulphure multo ſcatere certum eſt. Id vel odor ſaltim lixivii cinerum Anethi indicat. Solutio Lunae rem dubio omni eximit. Et phoenomena illa omnia, quae cum ſpiritibus Vitrioli, Salis, Nitri, ſolutionibus ſachari Saturni, Aluminis, ſublimati, Lunae, Vitriolorum Veneris et Martis, euenerunt, omnia ob ſulphur eueniſſe nullus dubitet. Sed quale id ſulphur? An bituminoſum? Illud vero ſpiritus Vitrioli colorem ſaltim mutat, nec in eo praecipitatur, ſpiritusque Salis et Nitri immutatos relinquit. Cuncta phoenomena, huic ſali propria eſſe aſſerere auſim; ideo et ſulphur, a quo exorta ſunt, peculiaris plane indolis eſt. Nec mihi vltra progredi licet; ſed non dubito, quin haec ſalia ob ſulphur in iis contentum peculiares plane effectus habitura ſint, ſi alia cum iis experimenta inſtituantur. Et tum ſpecialiora de iis dici poterunt.

runt. Sal Anethi ditius eſt ſulphure, quam ſal Saniculae. Volatile, quod hisce ſalibus ineſt, ex fumo cum ſpiritu Nitri cognoſcitur. Sal Saniculae et acidi pauxillum continet, quod ex ſublimati ſolutione croceo ſaltem inde colore tincta diiudicari poteſt.

§. 27. Sal Filicis eſt ſal tertium, ammoniacalis naturae, ſulphure foetum. Omnia indicia ſalis communis exhibet, ſed quod cum ſpiritu Nitri fumum edat, et Alkali volatilis. Hoc in cauſa eſt, cur hoc ſal ammoniacalis naturae pronunciauerim. Sulphur, quod continet, minerale eſt. Id Phoenomena cum ſpiritu Vitrioli et ſalis produnt. An exaltatio coloris in Vitrioli Martis ſolutione obſeruata a volatili, an ab adſtringente quadam re proceſſerit, decidere nolo.

§. 28. Perſpicuum itaque eſt, ſalia fixa plantarum differre, et qua re differant, argumentis ſufficientibus monſtraui. Sententia exinde ferri poteſt, an differentia haec in re Medica aliquod momentum habere poſſit? Nimis ſane differunt, quam vt differentia eorum negligatur. Si ſal Tartari e. g. a ſulphuris, vel acidi, vel volatilis, admixtione immutari creditur, ita, vt alium tunc effectum in corpore humano editurum eſſet, ac ſine vlla admixtione ingeſtum: quid impedit, quod et diuerſis plantarum ſalibus diuerſos effectus adſcribere queamus?

§. 29.

§. 29. Sed falſo ſupponitur, ſalia plantarum virtutem ſpecificam plantarum, e quibus parata ſunt, ita retinere, vt effectum eius ſenſibilem in corpore humano edere queant. Folia Abſinthii, Cardui benedicti, Centauri minoris, eundem prope effectum edere creduntur, attamen ſalia eorum multum differunt. Vice verſa, Nepetae et Euphraſiae folia, folia Tuſſilaginis et Plantaginis, Prunellae et Serpilli folia, diuerſum effectum edunt, cum ſalia vix fere differant. Hoc, vti verum eſt, ſatis monſtrat, ſalia plantarum eundem effectum non edere, ac eorum plantae. In effectu vero alicuius rei virtus ſpecifica conſiſtit, et haec cauſam ſenſibilem habere debet. Ineſt e. g. foliis Abſinthii certus amaror, qui a ſale et oleo peculiari modo permiſtis prouenit; is vero in combuſtione plantae perit. Ergo et effectus inde proueniens in ſale nullus erit. Non negauerim, poſſibile eſſe, vt halitus quidam ſubtiliſſimi alicuius rei, quae in planta non combuſta exſtiterant, et peculiarem effectum ediderunt, in ſale remanere queant. Eos vero adeo ſubtiles et paucos eſſe oportet, vt ſenſibus nullo modo pateant. Id enim obſeruatio euincit. Nullo modo me vrget exemplum Viri, a foliis Abſinthii ſingulariter abhorrentis et varia inde ſymptomata ſuſtinentis, et ab vſu ſalis Abſinthii eodem modo affecti; * id enim rariſſimum eſt. Et halitus ſubtiles e planta

* Ephem. Nat. Curioſ.

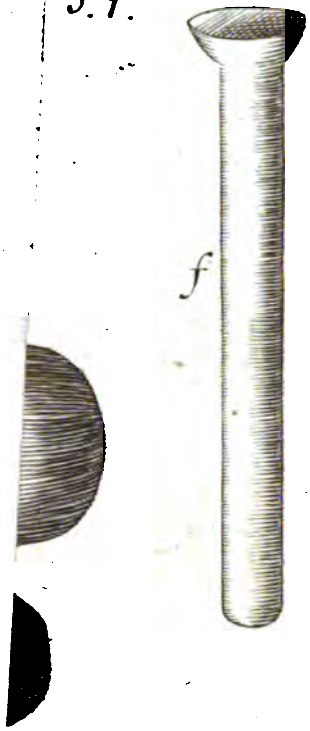
ta in ſale remanentes, qui hic effectum produxerunt, cum omnibus prope hominibus inſenſibiles ſint, nec effectum ſenſibilem in aliis producent.

CLASSIS TERTIA

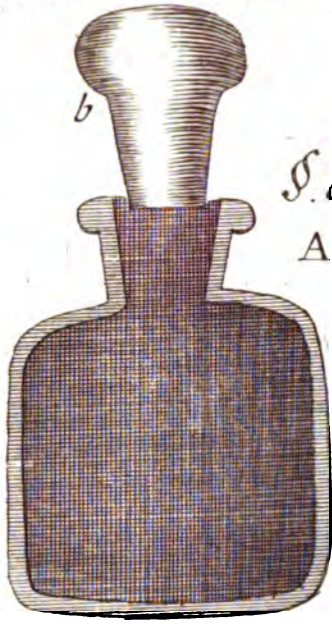
CONTINENS

HISTORICA.

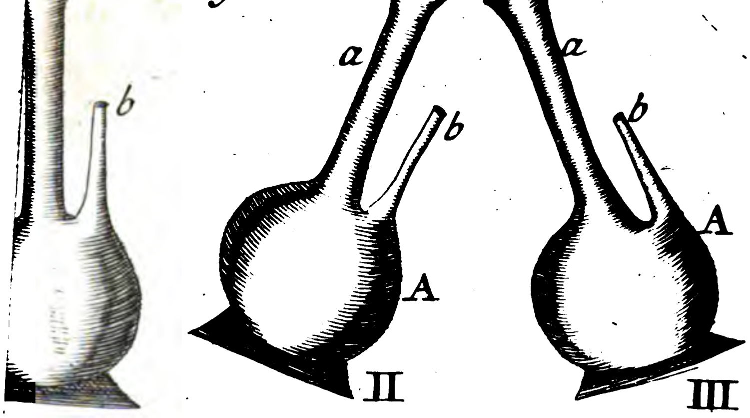
§. 1.



§. 6



§. 9. 10.



CONVERSIONES RERVM SCYTHICARVM TEMPORIBVS MITHRIDATIS MAGNI *ET PAVLLO POST MITHRIDATEM.*

T. S. B.

VEnio ad tempus maximis rebus geſtis inſignitum, monumentorum miſerabili ſtrage atque interitu deforme, ſeptemtrionalibus autem fabulis foecundum. Nam Scythae tam a Mithridate Eupatore adflicti ſunt, quam a Getis pulſi: inde iam de Othino Aſisque fama ducta, Troianis admiſtis originibus. Quae ex inſtituto noſtro ſic tractabimus, vt quantum veritatis in hoc altiſſimo puteo demerſum eſſe ſentiemus, tantum pro virili parte proferamus et a vanis perpurgemus. Haud ſum ignarus, ab exitu Alex-

andri Macedonis vsque ad hunc Mithridatem annos ducentos intercedere: eos tamen veluti deſerta loca et inculta tesqua relinquere nos oportet. Illa eſt videlicet monumentorum iſtius aetatis conditio. Quantum eſt, quod vel in primis de Lyſimacho nobis relictum fuit? Tamen, ſi recordemur, Thraciam eum tenuiſſe et Ponticas prouincias, fieri non poteſt, quin Graecas toto litore Ponti Euxini colonias idem quoque dicto audientes habuerit, vt tanto magis illius rebus Scythicas contineri ſentiamus. Fuiſſe *Lyſimachum*, quem regem! quam potentem! fuiſſe igitur tantummodo conſtat: et tum fere, captum bello a Dromichaete Getarum rege et dimiſſum, (1) vel τϱαγωδȣ́μενα de eius liberis interſeruntur, denique Seleuci Nicatoris ſenis de ſene Lyſimacho victoriae. Veluti canis e Nilo, ita tantas res delibant ὁι δαιμόνιοι. Fateor, ſcriptores eorum temporum Graecos nobis periiſſe: tamen, ſi exſtarent, credo eos Laconicum iſthuc nobis exorſuros, ἄμμες ποτ' ἦμες ἄλκιμοι. Quid enim ſimile vetuſtis hiſtoricis illa aetas protulit? Nunc, cum etiam iſti interciderunt, ſit ſane in ducentis annis Σκυθῶν ἐϱημία. Nam Macedonum reges ad Philippum vsque, quos rerum ſuarum praecones nacti ſunt? Philippus qualem cuperet, habuit Polybium Megalopolitanum, magnum virum, ſed qui de Scythicis rebus, in his, quae ex incomparabili opere exſtant, non vacauit, niſi vbi occaſione belli, quod

(1) Strabo pag. 209. et 211. ed. Caſaub. conf. Plutarchum in Demetrio.

quod Byzantii cum Rhodiis habuere, de Maeotide et Ponto et mercatura Pontica quaedam interſatus eſt lectu digniſſima. (2)

Quamobrem de Mithridate nos hic, quantum poteſt, videamus. Strabo, (3) Mithridatis ducumque eius armis, regionem, inde a Tira fluuio, quem alibi Danaſtrim eſſe demonſtrauimus, per Maeoticas gentes et per omne, vsque in Colchidem, litus Ponticum, illuſtriorem, quam dudum fuerat, factam praedicat. Modo res Ponticae et ipſius Mithridatis illa nunc in luce verſarentur, vt dudum. Si Memnon, ne quid dicam de reliquorum ſcriptorum ruina, ſub qua illa tempora ſepulta iacent, igitur, ſi vel vnus Memnon hodie exſtaret, quam multa de Mithridate ſciremus. Photius effecit, vt eum maxime deſideremus, quem is tanta dignum diligentia iudicauit, quanta haud facile alterum aliquem, et in quo tam multas reperimus veluti e naufragio tabulas rerum obſcurae et intermortuae memoriae. Photius ex Memnone, (4) *Mithridates*, inquit, *poſtquam regnare coepit*, κατεστρέψατο πολέμῳ καὶ τοὺς περὶ τὴν Φᾶσιν βασιλεῖς, ἕως τῶν κλιμάτων, τῶν ὑπὲρ τὸν Καύκασον, καὶ τὴν ἀρχὴν ηὔξησε, *bello deuicit reges circa Phaſin fluuium vsque ad regiones, quae ſuper Caucaſo monte ſitae ſunt et regnum ſuum auxit.* Haec maximarum victoriarum ſumma eſt. Tantundem fere nobis ex

 Trogo

(2) p. 425. ſeq. ed. Gron. (3) p. 10. ed. Caſaub. (4) p. 378. ed. Hoeſch.

Trogo Pompeio Iuſtinus reliquit: (5) *ad regni administrationem cum acceſſiſſet, ſtatim non de regendo, ſed de augendo regno cogitauit*: itaque Scythas, inuictos antea, ingenti felicitate perdomuit. Sic item Appianus Alexandrinus: (6) ἐχειρώσατο δὲ τὰ περίοικα τῶν βαρβάρων καὶ Σκυθῶν ὑπηγάγετο πολλοὺς, καὶ Ῥωμαίοις τεσσαρακονταέτη πόλεμον ἐγκρατῶς ἐπολέμησεν, *deuicit circumiectos barbaros et Scytharum multos ſubiecit et cum Romanis ſumma vi bellum geſſit annos quadraginta.* Has res igitur nobis curae eſſe oportere iudicauimus.

Mithridate Euergete defuncto, Mithridates, vt Salluſtius ait, (7) *extrema pueritia regnum ingreſſus, matre veneno interfecta*. Hiſtoria Miſcella: (8) *regnauit annis quadraginta, alii triginta.* Perperam vtrumque. Nam cum, M. Tullio Cicerone, C. Antonio Nepote, Coſſ. A. V. C. 691. quod certo conſtat, interiit, is, ſi quadrageſimus fuit annus, ne quid dicam de triceſimo, ſequitur, Mithridatem A. V. C. 652. imperium adiiſſe. At numum Mithridatis vide, ſimilem illis, quos Ioannes Valens in Achaemenidarum imperio produxit, cuius ἔκτυπον Buxbaumius CPli redux mecum communicauit. Habes in eo annum ΒΣ ſignatum, ſiue 202. Si is Seleucidaeus fuit, in autumnum A. V. C. 643. incidit: ſin Pontica illa fuit Epocha ſecundum Ioannis Valentis rationes, erit A. V. C. 649.

Tabula XII. Fig. 1.

Ap-

(5) l. XXXVII. 3. (6) p. 412. ed. Tol. (7) In Fragmentis e Seruio. (8) p. 40. ed. Murat.

Apparet igitur ex titulo numi ΒΑΣΙΛΕΩΣ ΜΙΘΡΑΔΑΤΟΥ ΕΥΠΑΤΟΡΟΣ ante A.V.C. 652 regem fuiſſe Mithridatem. Quare ex codice Ambroſiano veram in Paulo Diacono lectionem reſtituit Ludouicus Muratorius V. C. *vixit LXXII, contra Romanos bellum habuit annis XL.* Ita natus fuit A. V. C. 620. Appianus dubius haeret, (9) annosne LXVIII. aut LXIX. vixerit: regno tribuit LVII. ſicuti Plinius (10) LVI. Eutropius, T. Liuium fere ſolitus ſequi: *regnauit annis ſexaginta, vixit ſeptuaginta duobus.* Ab hac ſententia in annis regni non abhorret vel Strabo, (1) cui ἕνδεκα ἔτη γεγονὼς patri ſucceſſiſſe dicitur, videtur enim mihi Strabo δυώδεκα ſcripſiſſe, vel Memnon (2) cui τρισκαιδεκαέτης ad regnum perueniſſe dicitur, neque ita multo poſt a matris fratrisque aut fictis inſidiis aut veris ſeſe vindicaſſe parricidio. Igitur A. V. C. 632. regnare coepit, vnde ad illius exitum, anni ſunt ſexaginta Eutropii, aut potius Liuii. Sed cum Paulus Diaconus et Appianus annos quadraginta bellum cum Romanis geſſiſſe ſcribunt, manifeſti erroris tenentur. Vix enim XXXI anni numerari poſſunt, ſi inde a Cappadocia Ariobarzani regi L. Sullae ductu reſtituta et ab A. V. C. 660. tamquam a belli Romani prima occaſione ſecundum Dionyſium Petauium exordiaris: nam A. V. C. 666. demum, nudatis Mithridatis conſiliis, bellum a Romanis indictum gerique coeptum eſt. Ergo anni fere triginta ante bellum Roma-

(9) p. 411. 412. (10) l. XXV. 2. (1) p. 309. (2) p. 376.

num vacui fuerunt bellis Scythicis, quae Mithridates mature ſuſcepit gerenda. Iam velim pro ſe quisque conſideret, qui vigor animi in hoc rege iam ſene fuerit, quae latiſſime regnandi et cupiditates et ſpes et per barbaricam militiam ad maiores res indurandi militis fiducia, vt inde concludamus, qualem adoleſcentiam exegerit Mithridates.

Nihil eſt reliquum, quam vt de bello Scythico paſſim vndique colligamus veterem memoriam, praeſertim vero ex Strabone. Huic enim in Mithridaticis multum tribuo. Nam Strabonis mater neptis Lagetae fuit, proneptis Dorylai eius, qui apud Mithridatem Euergeten multum potuit. Huius Dorylai frater Phyletaerus filium reliquit et ipſum Dorylaum nomine, quem Mithridates ſummis honoribus admouit. Lagetam quoque Strabonis proauum et Stratarcham Lagetae fratrem ad ſe vocatos coluit. Stratarcham Strabo vltima ſenectute vidit. Moaphernes matris Strabonis patruus, extremis temporibus Mithridatis illuſtris euaſit: ne nunc totum genus Strabonis hic repetam, Mithridaticis deuinctum turbis, vt res iſtae etiam intra domus Strabonis famam contineri potuerint. Modo non ita exiliter res tantas tractaſſet Strabo, quod condonari poſſit alio in argumento verſanti, niſi etiam confuſe et ſuobſcure tractaſſet, quo vitio in toto opere laborat. Strabone igitur auctore (3) Mithridates cum ad regnum

(3) p. 372.

regnum peruenit, Pontum tenuit iis finibus, quos pater rexerat. Haly fluuio verſus orientem a Cappadociae regno diuidebatur, inde litus omne ad Amaſtriam vsque et Paphlagoniae quaedam partes ea in ditione cenſebantur: in mediterraneis vero prouinciae vltra Halyn extendebantur. Sinope erat regia, vbi et natus eſt Mithridates.(4) Hic deinde Heracleam, Graecam vrbem et liberam, ſibi ſubiecit et litus omne Ponticum, quod Cappadociae praetendebatur vsque ad Colchidem (5). Occupauit quoque Armeniam minorem, quae Cappadociam ab oriente claudebat, per Euphratem a reliqua Armenia diuiſa. Et cum Tibareni vltra Trapezuntem Chaldaeique vicini ſub dynaſtis Armenis fuiſſent, eos quoque ſibi ſubiecit, Ἀντιπάτρȣ τȣ̃ Σίσιδος παραχωρήσαντος, *Antipatro Siſide ſe ſuaque tradente.* Armenia, ob ſitum regionis maximis munimentis refugioque fortunarum, ſi quis caſus poſtularet, peropportunum, inprimis curae fuit Mithridati, vt in ea ad quinque et ſeptuaginta caſtella exſtruxerit, inque iis opum ſuarum magnam partem reconderit.(6) Sic aditus in Colchidem patefactus erat, (7) regionem admodum accommodatam, Scythicum bellum cogitanti, propter tum ſubſidiorum ad naualem rem copiam, tum expeditionis meditatae et occaſionem et ex propinquo facilitatem. Deinde iam, qui Mithridatica ſcripſerunt, (8) Achaeos, Zygos, Heniochos, Cer-

(4) Strabo p. 375. (5) ibid. (6) Strabo p. 382. (7) ib. p. 343. (8) Apud Strabonem p. 342.

Cercetas, Moſchos, et Phteirophagos et Θοάνας, ſiue vt in excerptis Strabonis eſt, Σοάνας aliasque paruas circa Caucaſum gentes commemorant, per quas via aperienda erat et Scythas et Boryſthenem Iſtrumque petituro. Proximi Boſporanis Achaei, Zygi medii inter Heniochos Colchis proximos: nam reliquae gentes iam intra montes reiectae. Hos populos partem vi, partem dolo et conditionibus in poteſtatem redegiſſe videtur Mithridates. Heniochi qui quatuor reges habuere, ita fidi fuere poſtea Mithridati, vt, cum a Cn. Pompeio victus in Boſporum fugeret, (9) in eorum regionem ſeſe reciperet ſine metu, non item committere ſe fortunamque ſuam auſus Zygiis, quorum in litoribus magna moleſtia iter fecit, naues ſubinde conſcendens, donec Achaeos teneret, qui eum cupide receperunt. Notae deinde Maeoticae gentes, Sindi, Dandarii, Toreatae, Agri, Arrechi, Tarpetes, Obidiaceni, Sittaceni, Doſci, (10) quae gentes a Ponti litoribus circumiectae Boſporanis, ad Maeotin et Tanaim, Caucaſumque pertinebant. Incertum, Scythaene, an Sarmatici corporis. Nam ad orientem iam Sarmatae planiciem, vsque ad Volgam, incolebant. (1) Illae autem gentes etiam poſtea ſaepe Boſporanis ſubiectae, ſaepe ſui iuris fuerunt. (2) Sed vt erat Mithridates promtus atque arte fallendi nulli ſecundus, ita omnes illos populos conciliaſſe ſibi videtur,

(9) Strabo p. 342. (10) Strabo p. 341. (1) Strabo p. 343. (2) ib. p. 341.

detur, et in ſocietatem belli contra Scythas accepiſſe.

Scythiae autem hunc fere ſtatum iis temporibus fuiſſe reperio. Cherrhoneſus in tres quaſi ditiones diuiſa erat. Litora Graecae coloniae inde ab vltima aetate obſederant: Boſporani tyranni partem agri tenebant orientalem, Scythae, quos Tauros et Γεωργὸς noſtri vocant, occidentalem. (3) Sed Boſporanae prouinciae in obiecta Aſia vltra Boſporum Cimmerium multo ampliores fuerunt. Panticapaeum ſedes tyrannorum fuit: Theodoſiopolis ſiue Theodoſia, quae nunc [illegible] *Caſa*, extrema verſus Tauros vrbs. (4) Hi autem Scythae Tauri ab Iſthmo, vbi ceteris connexi fuerunt Scythis, maximam Cherrhoneſi incoluerunt regionem. Haec tum Scythia Minor dicta. Regio omnis copioſa, quod Scythae agros ſuos impigre colerent. Tantus inde frumenti prouentus fuit, vt Leucon tyrannus Athenienſibus ab Theodoſia vndecies millia medimnorum ſubmiſerit, quamquam Chreſtomathiae Strabonianae tantum centum et quinquaginta millia edunt. (5) Ceterum quod Boſporani dynaſtae ante Mithridatem tyranni vocantur, id argumento eſt, potentiam illam ex Graecis coloniis eſſe ortam, quae etiam iuſtam dominationem et a ſe delatam vltro, non fere alio magis quam tyrannidis nomine nuncuparunt, vt Miltiades tyrannus vocatus eſt apud Cornelium Nepotem. Strabo:

(3) ib. p. 214. (4) p. 214. 215. (5) p. 92. ed Hudſ.

bo: (6) ἐκαλοῦντο δὲ τύραννοι, καίπερ οἱ πλείους ἐπιεικεῖς γεγονότες, *nuncupabantur vero tyranni, quamquam plerique eorum clementes fuerunt.* Non eſt, quod miretur Iſaacus Caſaubonus tamquam in re inſolita, tyrannos dici, qui aequitati ſtuduerint. Hic ipſe vir longe doctiſſimus tyrannos illos ex Diodoro Siculo et Strabone nobis, quamquam non accurate, expoſuit, tamen ita, ut, quando neque iſta tempora, neque res ad noſtram curam pertinent, eorum recenſione ſuperſedere poſſimus. Archaeanactidae, Mileſiorum apud Panticapaeum coloniam, magiſtratus magis, quam reguli, inde usque ab Olymp. LXXV. quo fere tempore Xerxes in Graeciam traiecit, annos duos et quadraginta rebus praefuerunt. Spartacus primus tyrannorum Olymp. LXXXV. 3. poſt Corinthiaci initium belli fuit. Ad Olympiadem CXXIV. Diodorus Siculus nos deſerit, ut anni centum et octoginta ad initia Mithridatis vacui maneant, quos ex obſcuris Strabonis teſtimoniis, Iſaacus Caſaubonus non auſus eſt reſtituere. Pariſades tum maxime tyrannus Bosporanorum fuit, cum Mithridates bellum Scythicum gereret. Minori Scythiae Strabo accenſet partem regionum extra Iſthmum usque ad Boryſthenem, magnam videtur dicere, quae ad Tyram Iſtrumque pertinebat, (7) quamquam hic locus in Strabone corruptelae mihi ſuſpectus eſt. Id enim vero dicere apparet, Scythas non latius coluiſſe iis temporibus, quam Herodo-

(6) Comment. in Strabonem p. 117. (7) p. 215.

rodoti, alii quod Iſtro traiecto agri neſcio quantum tenuere, Thracibus vi eiectis. Nam Strabo hic Mithridatica tempora illorumque ſcriptores reſpicit. Scythae illi pecudibus ſtudebant et lacte victitabant, agros vero elocabant colendos, quibus viſum eſſet exiguum tributum pendere: non ſoluentibus bellum inferebant. (8) Igitur permiſti Scythis alii populi fuerunt. Scymnus Chius, qui Mithridate opibus florente periegeſin ſcripſit, de Tomitis, cum canit: ὑπὸ Σκυθῶν ἐν κύκλῳ οἰκουμένους prodidit. Et de Dionyſopoli idem

> Ἐν μεθορίοις δὲ τῆς Κροβύζων καὶ Σκυθῶν
> Χώρας, μιγάδας Ἕλληνας οἰκητὰς ἔχει.
>
> *In confinibus autem Crobizorum et Scytharum*
> *Terrae, Graecos habet barbaris permiſtos incolas.*

Tenuere igitur Mithridatico aeuo Scythae etiam regiones vltra Iſtrum. In ſuperioribus regionibus vicini Germanis Baſtarnae et Tyrigetae, quos Strabo Germanici populos corporis fuiſſe ſuſpicatur. (9) Roxolani denique ἀρκτικώτατοι μεταξὺ τοῦ Τανάϊδος καὶ τοῦ Βορυσθένους νεμόμενοι πεδία, ὑπὲρ δὲ Ῥωξολανῶν εἴ τινες οἰκοῦσιν, οὐκ ἴσμεν, *maxime ad boream reiecti agros intra Tanaim et Boryſthenem incolunt, an ſuper Roxolanis alii colant, ignoramus.* Hic tantum velim, vt veterum opinio vnicuique ob oculos verſetur, qua Tanais fontes multo, quam ſunt, magis ſub borea ponerent, vt ſuperiorem Volgam

 cum

(8) ib. (9) p. 211.

cum Tanai confudiſſe videantur. Igitur Roxolani intra fontes Boryſthenis ad Tanaim ſorte et ad Volgam coluiſſe videntur Mithridaticis temporibus. Fruſtra adhuc illa in gente, quae tum primum cognita, deinde etiam Romanis bellis celebrata fuit, ad hunc diem laboratum fuit. Nihil ego inuenio, in quo ſatis acquieſcam. Sed cum Budinos Fennorum maiores fuiſſe arbitror, vt alias exponam amplius, Fenni autem etiam nunc Suedos *Rosſalein*, *Ros populum* vocant, poteſt ſane ea res nos aduertere.

Cum his gentibus geſturus bellum Mithridates, a Cherrhoneſitis ad opem ferendam inuitatus eſt. Strabo: (10) Χεῤῥόνησος ἦν πρότερον αὐτόνομος πορθουμένη δὲ ὑπὸ τῶν βαρβάρων ἠναγκάσθη προστάτην ἑλέσθαι Μιθραδάτην τὸν Εὐπάτορα, στρατηγιῶντα ἐπὶ τοὺς ὑπὲρ τοῦ Ἰσθμοῦ μέχρι Βορυσθένους βαρβάρους καὶ τοῦ Ἀδρίου. *Cherrhoneſus vrbs erat antea ſui iuris, vexata agro vaſtato a barbaris* (κατατρεχομένη Chreſtomathiae Strabonianae habent, quod facit, vt *captam atque dirutam fuiſſe* non auſim interpretari) *coacta eſt patronum et defenſorem ſibi adſciſcere Mithridatem Eupatora, qui tum bellum mouebat aduerſus barbaros ſupra Iſthmum Cherrhoneſi Tauricae vsque ad Boryſthenen et Hadriaticas regiones.* Oportet igitur in vicino iam fuiſſe Mithridatem, Scythasque ad Tanaim petiiſſe, cum a Cherrhoneſitis

(10) p. 213. (1) p. 88. ed. Hudſ.

ſitis in auxilium vocaretur. Miſit copias, vt videtur, nauales ex Colchide, cum Cherſon vrbs aliter ab eo adiri non poſſet. Strabo ita pergit narrando: *Mithridates hoc cognito*, ἄσμενος πέμψας εἰς τὴν Χεῤῥόνησον στρατιὰν, ἅμα πρός τε τοὺς Σκύθας ἐπολέμει Σκίλουρόν τε καὶ τοὺς Σκιλούρου παῖδας, τοὺς περὶ Παλακὸν, οὓς Ποσειδώνιος μὲν πεντήκοντα φησὶν, Ἀπολλωνίδης δὲ ὀγδοήκοντα, ἅμα δὲ τούτους τε ἐχειρώσατο βίᾳ καὶ Βοσπόρου κατέστη κύριος, παρ' ἑκόντος λαβὼν, Παρισάδου τοῦ κατέχοντος. Locus hic corruptelae accuſatus fuit, quod interpretes τοὺς περὶ Πάλακον *Palacum ipſum*; more vtique Graecorum loquendi explicarent, non cohaerente deinde ſenſu, Caſaubonus vero Παλάκιον caſtellum reponeret, *quo vſus ſit Scilurus aduerſus Mithridatis legatos*. Huius ſane meminerat Strabo: (2) ſed idem paullo ante (3) Πάλακον τοῦ Σκιλούρου commemorat, eamque lectionem veram eſſe ſentio, quam codices proponunt, eum autem in ſenſum accipio, quod filii nepoteſque Sciluri, Palacum vt vel maiorem natu, vel teſtata virtute virum ducem ſecuti ſint, patre ob ſenectutem imbelli. Non minus enim hanc interpretationem vſus Graecorum loquendi quam alteram admittit, loci autem huius natura eam ſolam. Conuerto igitur Latine: *Mithridates cupide miſit exercitum Cherrhoneſum, ſimul contra Scythas bellum geſſit et contra Scilurum Scilurique liberos, qui cum Palaco erant, quosue*

 Po-

(2) p. 216. (3) p. 211.

Poſidonius ait quinquaginta, Apollonides vero numero ad octoginta fuiſſe: et ſimul hostes ſubegit et Boſporum in poteſtatem recepit Pariſade concedente, qui regionem tenebat. Ita et res diuerſae et tempora vno in ſermone proponuntur. Duces memorantur, Diophantus, quem Memnon quoque inter praecipuos commendat, et Neptolemus. Diophantus videtur Cherſonitis ſubſidio veniſſe contra Scilurum et filios. Nam Strabo teſtatur, (4) contra eos a Diophanto Mithridatis duce Eupatorium caſtellum eſſe conditum ad Carcinitin ſinum: occidentale id Tauricae litus erat. Eodem teſte, (5) Scilurus et filii caſtella in Cherrhoneſo condiderunt iisque vſi ſunt belli arcibus contra duces Mithridatis, Παλάκιον τε καὶ Χαῦον καὶ Νεάπολιν, haec tria tantum nominat Strabo. Itaque proelium quoque cum Palaco in Cherrhoneſo commiſſum videtur, quoniam Diophantus fuit, qui eum vicit. Hic Palacus Scythas et Roxolanorum, duce Thaſio, ſubmiſſa auxilia ſecum habebat numero ad quinquaginta millia, Diophantum vero multo minori inſtructum exercitu aggreſſus, contra phalangem ordinatam armatamque egregie, cum iſta multitudine adeo nihil effecit, vt multis ſuorum amiſſis recipere ſeſe cogeretur. Scythae interim etiam Pariſaden Boſporanorum tyrannum vrgebant adeo, vt ex deſperatione ſalutis Mithridati ſe ſuaque traderet. (6) Strabo: Παρισάδης οὐχ οἷός τε ὢν ἀντέχειν πρὸς τοὺς βαρ-

(4) p. 216. (5) ib. (6) Strabo p. 214.

βαρβάροις φόρον πραττομένοις μείζω τοῦ πρότερον, Μιθριδάτῃ τῷ Εὐπάτορι παρέδωκε τὴν ἀρχήν. *Pariſades cum non poſſet reſiſtere barbaris tributum poſcentibus maius, quam antea, Mithridati Eupatori tradidit principatum.* Huic Pariſadae ſubſidio veniſſe videtur Neoptolemus dux. Illius cum Scythis duas pugnas recenſet Strabo duobus locis. Vno in loco equeſtre certamen ſuper glacie Maeotidis paludis ponit ante nauale praelium eadem in Maeotide.(7) Οὗ δὲ, inquit, πάγοι παρ' αὐτοῖς τοιοῦτοι τινές εἰσιν ἐπὶ τῷ στόματι τῆς λίμνης τῆς Μαιώτιδος, ὥστ' ἐν χωρίῳ, ἐν ᾧ χειμῶνος ὁ τοῦ Μιθριδάτου στρατηγὸς ἐνίκησε τοὺς βαρβάρους ἱππομαχῶν ἐπὶ τῷ πάγῳ, τοὺς αὐτοὺς καταναυμαχῆσαι θέρους, λυθέντος τοῦ πάγου. *Glacies apud eos tanta eſt in oſtio lacus Maeotidis, ut eodem in loco, in quo hieme Mithridatis dux barbaros equeſtri certamine ſuper glacie vicit, nauali praelio eoſdem ſuperauerit aeſtate, glacie ſoluta.* Alibi praelium nauale ponere videtur ante equeſtre et hibernum,(8) ita enim fatus eſt: Νεοπτόλεμον δέ φασι τὸν τοῦ Μιθριδάτου στρατηγὸν, ἐν τῷ αὐτῷ πόρῳ θέρους μὲν ναυμαχίᾳ περιγενέσθαι τῶν βαρβάρων, χειμῶνος δ' ἱππομαχίᾳ. *Neoptolemum, aiunt, Mithridatis ducem eodem in traiectu, aeſtate nauali praelio ſuperiorem fuiſſe barbaris, hieme autem equeſtri certamine.* Sed apparet priori loco eum multo curatius temporum ordinem reſpexiſſe, in altero rem magis quam tempus. Oſtium Maeotidis, tra-

iectus

(7) Strabo p. 59. (8) id. p. 2[illegible].

ieƈtus eſt, ſeu Boſporus Cimmerius, de cuius congelata glacie etiam Herodotus teſtatur, (10) ἡ δὲ θάλλασσα πήγνυται καὶ ὁ Βόσπορος πᾶς ὁ Κιμμέριος, καὶ ἐπὶ τοῦ κρυστάλλου οἱ ἐντὸς τάφρου Σκύθαι κατοικημένοι στρατεύονται καὶ τὰς ἁμάξας ἐπελαύνουσι πέρην ἐς τοὺς Ινδοὺς. *Mare autem congelaſcit et Boſporus Cimmerius totus, ſuper glacie Scythae qui intra foſſam ſunt,* (in Cherrhoneſo Taurica) *praelia committunt et ſuper eadem plauſtris vecti vsque in Indiam iter faciunt.* Et gelu quidem condenſari facillime potuit tum Boſporus tum magna Maeotidis et Ponti pars, quod iis locis paſſim limo inducto aggeſtaque harena vada praebentur, qua de re prolixe diſputat Polybius. (1) Ex loco autem, in quo praelia commiſſa ſunt, concludo, Boſporano tyranno hunc maxime Neoptolemum auxilio eſſe miſſum contra Scythas et victoribus Mithridaticis Pariſadem ἑκόντα ἀέκοντί γε θυμῷ Boſporanas regiones tradidiſſe. Scymnus Chius de Panticapaeo tyrannorum ſede, in fragmentis Holſtenianis;

Ἐπ᾽ αὐτοῦ τοῦ στόματος τῆς Μαιώτιδος
Λίμνης τὸ Παντικάπαιόν ἐστιν ἔσχατον
Τοῦ Βοσπόρου Βασίλειον ἐπωνομασμένον.

In ipſo oſtio Maeotidis
Paludis Panticapaeum eſt extremum
Boſpori Regia cognominatum.

Scripſit Scymnus, vt Henricus Doduellus argumentis veritati conſentaneis demonſtrauit, A. V. C. 664.

(10) l. IV. c. 28. (1) p. 308. 309. ed. Caſaub.

664. periegeſin illam Nicomedi Chreſto regi Bithyniae, Mithridatis clienti dedicatam, ad quam haec fragmenta refero. Igitur cum a Mithridate, aliquot annis ante, conſtitutum eſſet regnum Boſporanum, hunc nominis honorem conſecutum eſt Panticapaeum. (*) Hiſtoria Miſcella: (2) *Mithridates totum Ponticum mare in circuitu cum Bosporo tenebat.* Sed vltra Carcinitin ſinum et Boryſthenem nihil tenuiſſe videtur. Ad curam Mithridatis de ornando Panticapaeo refero, quod Plinius ſcribit: (3) *circa Bosporum Cimmerium in Panticapaeo vrbe, omni modo laborauit Mithridates rex et ceteri incolae, ſacrorum certe cauſſa, laurum myrtumque habere: non contigit.* Pertenuis igitur haec memoria eſt a Strabone conſeruata, ceterarum rerum nulla, niſi quod ad Ctenuntem extrema tentaſſe inuenio Scythas, ab ea autem vrbe depulſos tota denique Cherrhoneſo ceſſiſſe. (4) Tributum deinde Bosporani, in quo nomine iam omnes et Graeci et Scythae, qui Cherrhoneſum tenebant, cenſebantur, Mithridati pependerunt in ſingulos annos frumenti medimnos ad centum et octoginta millia, argenti ducenta talenta. (5)

Romani, inquit Memnon, (6) cum ſuſpecta haberent Mithridatis conſilia, τοῖς Σκυθῶν βασιλεῦσιν ἐψηφίσαντο τὸς πατρώας αὐτὸν ἀρχὰς ἀποκα-

(*) Quae vrbs nunc كرش *Ghiersch* ſeu *Khiersch* et *Kersch* dicitur.
(2) p. 34. ed. Muratorii. (3) l. XVI. c. 32. (4) Strabo p. 216. (5) p. 215.
(6) Photius p. 378.

ταϑῆσαι, *decreuerunt, vt Mithridates Scythiae regibus ſuas regiones reſtitueret.* Ille vero nihili fecit S. C. Romanum et ſocietate cum Parthis, Medis et Tigrane Armeno inita, etiam Σκυϑικὺς βασιλεῖς καὶ τὸν Ιβῆρα προσηταιρίζετο, *Scytharum reges et Iberum in amicitiam pertraxit.* Haec, ait Memnon, accidiſſe circiter ea tempora, cum S. P. Q. R. Nicomeden Nicomedis et Nyſae filium regem daret Bithynis, Mithridates vero Socratem ſuperioris Nicomedis fratrem et ipſum Nicomeden cognomine Chreſtum opponeret. Conſtat ſatis A. V. C. 664 iſta accidiſſe. A. V. C. 665. hunc Nicomeden Chreſtum a Senatu hoſtem iudicatum ipſe Mithridates, qui euexerat, de medio ſuſtulit. A. V. C. 666. Bithyniam aperto bello inuadens Mithridates, Romanorum arma in ſe conuertit. Hoc ei tempus opportunum viſum, cum partim fregiſſet Scythicos populos, partim diſcordiis litibusque ſerendis diſtractos, iuuando comiter factionem ſuam contra validiores, firmauiſſet ad obſequia. Iuſtinus: (7) *ab Scythia quoque exercitum venire iubet.* Gallograeci etiam et Sarmatae Baſternaeque per legatos ad auxilia ferenda ſollicitati. Ex eo tempore tamquam turbo aliquis deſaeuiens, ſimul totam Aſiam, ſimul Graeciam inſulasque omnes in poteſtatem accepit. L. Cornelius Sulla cum redegiſſe videbatur in ordinem, cum rex pace inita coactus eſt in regnum ſuum ſe recipere A. V. C. 670.

Erant

(7) l. XXXVIII. 3.

Erant tum Romae C. Marii plebisque vires contra optimates praeualidae: optimatibus ſtudebat Sulla. Interim dum ad componendas res vrbis Sulla proficiſcitur, Mithridates, vt ait Memnon, (8) πολλὰ διὰ τὴν ἐν ᾗ κατηνέχθη συμφορὰν ἀποςάντων ἐθνῶν ἐξ ὑπαρχῆς χειρωσάμενος, *multis gentibus, quae propter calamitatem, qua repente corruerat, defecerant, receptis,* vires recuperauit. Id puto accidiſſe, poſtquam L. Muraena Sullae legatus reuocatus eſt a Mithridate laceſcendo. Nam cum Sulla pacem regi dediſſet, Muraena e Cappadocia eum laceſſebat. Hoc amoto, Appianus quoque teſtatur, (9) Mithridatem res Boſporanas ordinaſſe et Macharem filium genti praefeciſſe, Achaeos denique Colchis finitimos ſubegiſſe. Haud ita multo poſt, L. Lucullus ex conſulatu in Ciliciam prouinciam et ad bellum Mithridaticum, M. Aurelius Cotta eius in conſulatu collega cum claſſe ad Propontidem Bithyniamque tuendam venerunt. P. Rutilius Cottae legatus ad Chalcedonem caeſus, maximam exercitus partem amiſit. Gloria victoriae penes Baſternas maxime fuit, qui peditibus Romanis in fugam coniectis, magnam ſtragem ediderant. (10) Baſternarum ad triginta ceciderunt, ex reliquo exercitu regio ſeptingenti. Romani pedites ad quinque millia et quingentos. Haec regi victoria A. V. C. 680. obtigit. Baſternae autem, quorum in exercitu Mi-

(8) p. 380. (9) p. 363. (10) Memnon p. 378.

thridatis virtus eluxit, quantum ex Scymni Chii eorum temporum aequalis fragmento conſtat, Thracibus vicini coluere, alterius tamen corporis populus, ita enim fatus eſt. (1)

Οὗτοι δὲ Θρᾷκες Βαςάρναι τ' ἐπήλυδες.

Et Strabo eos haud ita multo poſt haec tempora ad Tyram fluuium collocat (2) in mediterraneis, ad Danubii vsque oſtia, σχεδόν τι καὶ αὐτοὺς τοῦ Γερμανικοῦ γένους ὄντας. Cornelius Tacitus (3) diſerte: *Peucini quos quidam Baſternas vocant, ſermone, cultu ſede ac domiciliis vt Germani agunt.* Itaque vel inde colligitur, quantum regionum Mithridates partem vi, partem beneuolentia ſua ſibi deuinxerit. Sed cum L. Lucullus acie toties ſuperior, e Cappadocia Ponticas prouincias iuuaderet, Mithridates πρὸς τοὺς Σκυθῶν βασιλέας, *ad reges Scytharum*, et ad Parthum legatos de auxiliis miſit, ἀλλ' οἱ μὲν ἀπεῖπον, *Scythae ei negarunt.* Teſtem habeo Memnona. (4) Appianus in Mithridaticis ſcribit, (5) miſiſſe regem εἰς Σκύθας τοὺς ὁμήρους, *ad Scythas finitimos* aurum muneraque alia per Dioclen legatum: hunc cum auro ad Lucullum transfugiſſe. Igitur tum quidem in exercitu regio contra Romanos Scythae publico nomine militarunt nulli. Fuit quidem in caſtris Romanis e Mithridatico exercitu transfuga ἀνὴρ Σκύθης, ὄνομα Ολκάβας, vtar enim Appiani verbis, (6) qui a L. Lucullo ad

(1) p. 46. ed. Hudſon. (2) p. 212. (3) De moribus Germanorum cap. 46. (4) p. 373. (5) p. 375. ed. Tollii. (6) p. 376.

ad ſecretos ſermones ſaepe admiſſus, cum ad eum meridiantem breui pugione accinctus veniens a ſeruis acceſſu prohiberetur, ſiue ſuſpectum ſeſe eſſe ſentiens, ſiue praeferox iracundia, quod ignominiam accepiſſet a ſeruis, ad Mithridatem rediit atque Σοβάδακον Scytham, vt tranſiturum ad Romanos criminatus oppreſſit. Sex. Iulius Frontinus in ſtratagematis (7) auctores habuit, quibus hunc *Adathantem*, ſic enim adpellat, ſubornatum a Mithridate ſcribit, ad occidendum ex inſidiis Lucullum. Scytham eum fuiſſe, non confeſtim crediderim Appiano. Nam Plutarchus in Lucullo (8) hunc Ολθακὸν vocat, et *Dardariorum dynaſten* fuiſſe prodidit, γένος δ᾽ εἰσὶν οἱ Δαρδάριοι βαρβάρων τῶν περὶ τὴν Μαιῶτιν οἰκούντων, *Dardarii genus barbarorum ad Maeotin colentium.* Hic populus prope Lazios ſitus fuit, iſthic fere, vbi etiam nunc in tabulis Delisliamis eſt *Dandars.* Quare mihi dudum in mentem venit, Plutarchum ſcripſiſſe Δανδαρίους. Stephanus ex Hecataeo Δανδάριοι ἔθνος περὶ τὸν Καύκασον. Strabo quoque Dandarios, Sindos et Toreatas Maeoticis accenſet. (9) Cornelius Tacitus (10) quoque *Sozam Dandaricae* (vt quidem Beatus Rhenanus emendauit, erat enim antea Dandaridae) *oppidum a Mithridate relictum* ſine praeſidio et cultoribus, ſcribit. Hos Dandarios Lucas Holſtenius, (1) *Indicam gentem circa fontes Indi fuiſſe* cenſuit. Nempe in hoc quidem vehementer errauit

(7) l. II. c. V. 30. (8) p. 501. (9) p. 341. (10) Annal. XII. 16. (1) In Stephanum p. 91.

rauit Holſtenius, vir, ſi quis alius de geographia veteri optime meritus, quod Δαρδανέας Indos apud Dionyſium Periegeten cum his *Dandariis* commiſcuit. Noli igitur Holſtenii monitu apud Periegeten vocem illam mutare in Δανδάρεες, ſed Claudium Ptolemaeum potius audi, qui Δεράδρας et Δαράδρας ſcripſit, aut, ſi malis, Nonnum Pentapolitam et Stephanum Byzantium, qui Δάρδας, ex quo Dionyſius Alexandrinus carminis cauſſa Δαρδανέες. Sed Plutarchi ad Caucaſum Dandarii, metuendum eſt, vt ad Scythas non magis pertinuerint, quam ad Indos. Quid ſi ad *Sarmaticos* intra Caucaſum populos potius ſunt referendi? Nimirum Scytharum nomine, iſta quidem aetate, qua Appianus ſcripſit, de gentibus omnibus ad Caucaſum impune abutebantur ſcriptores. Apud eundem Appianum: (2) Αγαροι ἔθνος Σκυθικόν, Mithridatis vulnus curaſſe dicuntur. Videntur illi ex *Gerrho* regione Scythica ad Gerrhum fluuium Herodoto commemorata, Γέῤῥιοι, vt τὸ ἐθνικὸν Stephanus edidit.

Cum deinde Mithridates a Lucullo victus fractusque ad Tigranem fugeret, iterum legatos miſit, πρὸς τοὺς ἐν Σκυθίᾳ Χεῤῥονησίτας καὶ Θευδοσιανοὺς καὶ τοὺς περὶ τὸν Βόσπορον δυνάστας ὑπὲρ συμμαχίας, *ad Cherroneſitas in Scythia et Theodoſianos et dynaſtas Bosporanos de foedere*, quemadmodum Memnonis excerpta habent. (3) Sed peccauit breuitate

(2) p. 385. (3) p. 387.

uitate recenſendi Memnonem Photius. Quid enim de foedere agi poterat cum incolis Cherrhoneſi Tauricae vel cum Bosporanis, qui ſub Mithridatis poteſtatem dudum redacti fuerant? Auxilia imperare poterat Mithridates, ſed auxilia ſubmiſſa ſunt nulla. Quamuis Bosporanum regnum adminiſtraret Machares Mithridatis filius, quem et ipſum Mithridatem vocat Dio Cocceianus, tamen ille ſeparata a patris rationibus conſilia ſectando, Romanos victores magis reſpexit. Eodem tempore multi Romae inuidebant Lucullo, nonnulli res ab eo geſtas criminando exagitabant, in exercitu vero eius miles laſciuiebat, piratae denique omnia per maria graſſabantur, cum ad ſummam incommodorum, M. Fabius dux Luculli a Mithridate ſubito oppreſſus eſt. Itaque Lucullo ſucceſſor datus eſt Cn. Pompeius, qui praelio nocturno A. V. C. 689. Mithridatem toto regno Pontico exuit. Rex e fuga Dioſcuriadem venit, nihil humile et abiectum animo agitans, ἀλλὰ τὸν Πόντον ὅλον ἐν κύκλῳ καὶ Σκύθας ἐπὶ τῷ Πόντῳ καὶ τὴν Μαιῶτιδα λίμνην περιελθόντα ἐς Βόσπορον ἐμβαλεῖν, *ſed Pontum totum in circuitu et Scythas et Maeoticam paludem circumire et in Bosporum inuadere*, Macharisque perfidiam vlciſci, per quam a ſuis prouinciis excludebatur. Eodem teſte Appiano, (4) per Scythicas gentes ἔθνη καὶ πολεμικὰ καὶ ἀλλότρια, *tum bellicoſas, tum alienato in Ponticos animo*, partem vi, partem gratia iter ſibi patefecit in Bosporum. Scy-

(4) p. 399. ſeq. Dio Caſſius p. 28.

Scythas hic, dicit Appianus, populos ad occidentale litus Ponti Euxini. Ab Dioſcuriade enim Mithridates Heniochos petiit, qui a quatuor regibus tenebantur. His tranſitum comiter praebentibus, *Zygios* vitauit, cum ob locorum difficultatem, tum ob feritatem gentis: itaque eorum in prouincia ſecundum litus maris iter fecit, naues ſaepe conſcendens, vbi terreſtris via non patebat. (5) Inde eum Achaeos admiſiſſe, ſcribit Strabo, Appianus (6) obſiſtere auſos et repulſos fuiſſe. Maeoticas regiones ingreſſus *Mithridates*, multis ſubditas regulis, ob famam rerum geſtarum ab omnibus benigne hoſpitaliterque deductus eſt: munera vtrimque data, foedus initum firmatumque elocandis inter principes filiabus regiis. (7) Machares, vbi cognouit, patrem *clauſtra Scythica*, vt Appianus loquitur, Caucaſea, inquam, tranſiſſe, omniaque intra Maeotin et Tanain (in qua regione Bosporani regni Maeoticae gentes a veteribus collocari ſolent) tenere, e Bosporo Cimmerio in Pontum ad Romanos fugit, medioque in curſu, vel ipſe ſibi manus intulit, vel, vt Dio Caſſius refert, ab amicis ſuis interfectus fuit. Cn. Pompeius Mithridatem perſequens, Colchidem intrauit et ad Phaſin fluuium, Seruilium cum claſſe, qua Ponti oram tuebatur, obuium habuit. At poſtquam cognouit, per quae loca, quam difficili itinere adeatur Bosporus, quam deinde anceps in longinquis regionibus et inquietis bellum futurum eſſet,

(5) Strabo p. 342. (6) p. 399. (7) Appianus l. c.

eſſet, relictis ad tuendam Ponti oram naualibus pedeſtribusque praeſidiis, Iberos et ad Caſpium mare Albanos in poteſtatem redegit, inde in Pontum et Syriam reduxit exercitum.(8) Mithridates conſilia agitabat, neque pro praeſenti fortuna, neque pro aetate. Conſtituerat enim ſecum, adiunctis ſibi Scythicis Geticisque auxiliis, per Pannoniam inuadere Alpes, (9) et omne barbaricum nomen in Romanos concitare. Eo et delectus militum habebat acerrime et arma telaque comparabat et exactionibus crudeliſſimis congerebat in aerarium opes, et eunuchos ad Scythiae regulos mittebat, qui auxilia peterent, filiasque regias deuinciendae cauſſa amicitiae inter regulos elocarent. (10) Enuchi cum filiabus regiis, a quingentorum militum praeſidio deducebantur. At haud longe digreſſi a Mithridate milites, enuchos interfecerunt et puellas ad Cn. Pompeium adduxerunt. Iam et Caſtor, praefectus Phanagoriae nouis rebus ſtudebat, (1) et paſſim vrbes exercitusque deficiebant, qua occaſione Pharnaces vſus, paternum regnum rapuit, Mithridates violenta morte interiit, M. Tullio Cicerone, C. Antonio Nepote Coſſ. ante C. N. 63. Quemadmodum Scythae toties Cherrhoneſi poſſeſſione euerſi ſunt, ita regnum Bospotanum ſuis finibus tum in Cherrhoneſo tum in obiectis ad orientem verſus Caucaſum prouinciis, fere vsque ad Valeriani Imp. tem-

(8) Appianus l. c. Plutarchus in Pompeio p. 637. (9) Appianus p. 400
(10) Omnia ex Appiano. (1) Hiſtoria Miſcella ex T. Liuio. p. 40.

pora (2) ſtetit et aduerſus finitimas gentes, ne Aſiaticas Romanorum prouincias infeſtarent, propugnaculo fuit. Tertius a Mithridate Aſander, qui ab anno ante C. N. 45. regnauit et apud Caeſarem Auguſtum gratioſus fuit, Iſthmum Cherrhoneſi muro ducto clauſit, denis in ſingula ſtadia turribus exſtructis. (3) Noſtrum non eſt, res Bosporanas hic amplius perſequi, poteſtque Ioannis Valentis induſtria eas cognoſcere cupienti ſufficere. (4)

Fractis eum in modum Scythis, ab occidente Getae grauiorem procellam mouerunt, quam nunc certo alicui tempori non poſſemus adſignare, niſi Dionis Pruſaei Sophiſtae oratio Boryſthenitica exſtaret. Quod Mithridatis temporibus Olbia vrbs floruerit, ex Scymni Chii fragmentis Holſtenianis (5) intelligimus:

Επὶ δὲ ταῖς καθ᾽ Υπανιν καὶ Βορυσθένην
Τῶν δυσὶ ποταμῶν συμβολαῖς ἐςὶ πόλις
Κτισθεῖσα, πρότερον Ολβια καλυμένη.
Μετὰ ταῦθ᾽ ὑφ᾽ Ελλήνων πάλιν Βορυσθένης
Κληθεῖσα, ταύτην τὴν πόλιν Μιλήσιοι
Κτίζυσι κατὰ τὴν Μηδικὴν ἐπαρχίαν.
Διακοσίων δὲ καὶ τεσσαράκοντα ςαδίων
Τὸν ἀνάπλυν ἀπὸ θαλάττης τῷ Βορυσθένει
Ποταμῷ ἔχει.

Οὗτος

(2) Zoſimus p. 28 ed. Oxon. (3) Strabo p. 215. (4) In Achaemenidarum imperio.

Οὗτος δὲ πάντων ἐςι χρειωδέςατος,
Κήτη μεγάλα καὶ πολλὰ καὶ καρπὺς φέρων
Τὺς φυομένυς, νομός τε τοῖς βοσκήμασι.

Vbi oſtiis iunctis in vnum confluunt
Hypanis Boryſthenesque, ſtructa eſt ciuitas,
Quae nomen antea obtinebat Olbiae:
Deinde Graecis dicta denuo fuit
Boryſthenes: Mileſii quoque ſtruxerant
Hoc oppidum florente regno Medico,
Ad quod ducentis ſtadiis adſcenditur
Quaterque denis ex mari Boryſthenem
Per flumen.
Hic amnis vnus omnium vtiliſſimus
Vaſtis abundans plurimisque piſcibus
Frugumque copia atque laetis paſcuis.

vt Lucas Holſtenius conuertit. Recte Scymnus vigente adhuc Medico regno conditam a Mileſiis ſcripſit, nam Euſebius Olymp. XXXI. 2. coloniam deductam fuiſſe teſtatur, annis ante C. N. 655. tertio anno Phraortis regis Medorum, ſedecim annis ante, quam Cimmerii a Scythis ex his regionibus pulſi ſunt, vt noſtrae rationes in Chronologia Scythica poſtulant. Ob tantam vetuſtatem vrbis et propter maximam opportunitatem mercaturae, tantae ciuium fuere opes, vt, Heredoto teſte, Olbitae dici mallent, quam Boryſthenitae, ſicuti a Graecis ceteris ipſoque Herodoto nuncupabantur. Olbia autem, ſi interpreteris nomen, *felicitatem et adfluentiam* continet, qua ſe *beatos* iudicarunt ciues.

Poſt id tamen nomen Boryſthenitarum, a vicino ductum fluuio, ſic obtinuit, vt Dio Chryſoſtomus ipſa in vrbe, Boryſthenitas dicere minime reformidaret. Iam de hac vrbe ſic ait Dio Sophiſta: (5) ἡ δὲ πόλις τῶν Βορυσθενιτῶν τὸ μέγεθός ἐστιν οὐ πρὸς τὴν παλαιὰν δόξαν, διὰ τὰς συνεχεῖς ἁλώσεις καὶ τοὺς πολέμους, *vrbs Boryſthenitarum pro veteri gloria non item nunc ampla eſt, quod ſaepe capta, multa bello pertulit.* Tum vero commemorat, τὴν τελευταίαν καὶ μεγίστην ἅλωσιν, οὐ πρὸ πλειόνων ἢ πεντήκοντα καὶ ἑκατὸν ἐτῶν. εἷλον δὲ ταύτην Γέται καὶ τὸς ἄλλας τὰς ἐν τοῖς ἀριστεροῖς τοῦ Πόντου πόλεις, μέχρι Απολλωνίας, *extremam vrbis expugnationem omnium acerbiſſimam, annis non amplius centum et quinquaginta ante eum diem: ceperunt autem Getae cum hanc vrbem, tum ceteras ſiniſtro litore Ponti, vrbes, vsque ad Apolloniam.* Denique cetera perſequitur, vt Getae, poenitentia ducti damnumque id ſuum rati, ſi vrbs antea mercatibus frequentiſſima et fructuoſiſſima Scythis, in ruinis iaceret, Graecos immunitate aliisque commodis propoſitis ad reſtaurandam eam allexerint. Boryſtheniticam Dio dixit, vt ab eruditis viris obſeruatum fuit, A. C. 94. Ergo res illae Geticae in annum ante C. N. 56. A. V. C. 698. ſeptimum ab interitu Mithridatis incidunt. Poſtquam Getarum regnum crebris bellis concuſſum, Βοιρεβίστας *Voereuiſtas* ex Δεκανέου *Decennei* aut praeſtigiatioris, aut ſapientis viri, ſententia reſtituit, etiam Ro-

(5) p. 437. ed. Morell.

Romanis terrori fuere Getae. Illo a ſeditioſis ciuibus ſublato, regnum inter plures principes diuiſum fuit. Modo eorum quatuor fuerunt, modo quinque et vel plures vel pauciores numero. (6) Ante Auguſtum Caeſarem adeo validi fuere Getae, vt ad ducenta millia in aciem poſſent producere, Auguſti vero temporibus, tum diſſidiis inter ſe, tum bellis, ſic attriti ſunt, vt ſub Tiberii Caeſaris aetatem Strabo teſtetur, non fuiſſe amplius quam quadraginta millia virorum, qui arma ferrent. Getas vt opinor dicit, qui in maiorum ſedibus permanſerant, cum ceteri nouas quaeſiſſent. Huiusce rei indicium eſt capta ante C. N. 94. Olbia. Et inde fere in Scythicis campis frequentius Getarum nomen, quam Scytharum eſt. Sed de his rebus praeſtat copioſius dicere in Memoriis Geticis, quam hoc loco.

Nam nos hic potius dicemus de Othino eiusque expeditione in ſeptentrionales regiones, quam in his Geticis Scythicisque turbis contineri ſentio. Othini memoria vera, vt puto, eſt, ſed adeo deformata ab figmentis tum vulgaribus, tum eruditis, vt vix colorem quendam veritatis retineat, vtque mirum non ſit, cum in his quae de eo traduntur, tanta exſtet apud ſcriptores ſeptentrionales diſſenſio. Dum pro ſe quisque omnia ad ſuam gentem trahit, dum aliena appetit, non apparet, quid teneat tamquam proprium vel in hiſtoria

(6) Strabo p. 210.

vel etiam in fabula. Cum vero diuinus cultus Odino per omnem ferme Europam ſeptentrionalem eſt tributus, id mihi idoneum argumentum videtur eſſe, vt credam, exſtitiſſe aliquem priſco aeuo celebrem virum, magnis facinoribus perpetratis inſignem, quem hominum ſimplicitas ex heroum numero paullatim euexerit ad deos et denique praecipuo honore ante deos alios coluerit. Ne quem vero moueat, cum et fabulam concedam eſſe Othinum, et veritatem in fabula requiram, figmenta reiiciam. Plerique populi et praeſertim libertatis virtutisque amantes, *rerum ante ſe geſtarum* admiratione moti, ſi non ſcripto, tamen ſermone et carmine aliquam priſcae memoriae recordationem conſeruarunt. Fabulae a veris ſermonibus narrandi obſcuritate differunt, non tota natura ſua, vti falſa et commentitia. Sic in Graecarum fabularum plerisque ineſt rerum geſtarum quaedam veritas, ſed velis occultata ſuis et tenebris. Eleganter Strabo: (7) Φιλειδήμων ὁ ἄνθρωπος, προοίμιον δὲ τούτου τὸ Φιλόμυθον, et idem paullo poſt non minus vere: οἱ πρῶτοι ἱστορικοὶ καὶ Φυσικοὶ, μυθογράφοι. Quam ſententiam Palaephatus, Euſtathius et magnus Grammaticorum populus in explicandis fabulis Graecis ſequuntur. In Romanis autem nolite credere, Fabium Pictorem aut L. Siſennam, vel Claudium Quadrigarium et Q. Valerium Antiatem ab Euandri, Carmentae, Saliorum carminibus abſtinuiſſe, aut nihil

(7) p. 13.

nihil traxiſſe a fama. Is quidem vehementer errat, qui nihil ſecus factum putet in primordiis Romani nominis, quam vt ſcriptis eruditorum hominum continetur. Ingenuam T. Liuii confeſſionem vide, aut Dionyſii Halicarnaſſenſis a T. Liuio diſſenſionem. Priſcis autem fabulis, (quas a *fando* ſeu obſcuro rumore haud abſurde putamus dici) multa figmenta paullatim admiſta fuerunt, quae pro ſuo quisque ingenio aut reſcidit aut interpretatus eſt. Eſt tamen difficile in omni fabula ſentire, quid falſi admiſtum ſit vero, aut quantum in earum aliqua vetus rumor a putido commento discrepet: multo deinde difficilius eſt, ſi diuerſorum populorum diuerſae fabulae vnum in corpus confuſae ſint: difficillimum, ſi qui eruditi homines, vt ampliores ornatioresque priſcas facerent fabulas, otio ſuo intemperanter ſint abuſi, eorum pigmenta a rudibus fabulis vt ſeiungas. Quare, quemadmodum Flamini Diali non licebat vel nominare vel tangere fabam, ita videri alicui poſſit, a fabulis omnibus abſtinere oportere hiſtoricos. At timent merito, ne in obſcuris temporibus, ſimul cum fabulis tenuem verae hiſtoriae memoriam amittant, eo, vt quisque iudicio valet, ita vero ſimilia in iis conſectatur. Mihi vero duabus de cauſſis non videntur negligendae: tum, ne quis vana et commentitia ex iis in hiſtoriam importet, nimio veteris rumoris ſtudio, tum, ſi qua in iis, veris conſentanea transluceant, ea vt nobis ſeponamus. Septemtrionales fabulae

eandem

eandem naturam, quam Graecae habent. Sermone hominum et cantu conſeruabantur, pertenui ſane et fallaci ad fidem miniſterio, praeſertim ſi vera facta adulando extollerentur in maius. Olaus Verelius initio animaduerſionum in Gothrici et Rolſi hiſtoriam, narrationes de rebus praeclare geſtis per ora hominum traditas et in concionibus conuiuiisque celebratas fuiſſe demonſtrauit. Quid enim aliud Islandorum, Noruagorum Danorumque Scaldri egerunt, quam vt pro ſuo quisque ingenio, ſeu veterem rumorem, ſeu ſui facta temporis concelebraret? (8) Eorum fidem Arrius Polyhiſtor (9) et eius fere aequalis Saemundus Sigfuſi filius et poſt alios, quos Thormodus Torfaeus et Arngrimus Ionas recenſent, Snorro Sturlaeus (10) ſecuti ſunt. Sapienter hic fidei ſuae cauit Snorro, vir, vt ex illius monumentis ingenii apparet, magno iudicio, neque minori integritate et fide, par denique optimis priſci aeui ſcriptoribus, praeterquam cum a tenui eruditione deluſus eſt. Is enim ait (1) ſcripſiſſe ſe, *ductu partim eorum, quae in antiquiſſimis veterum annalibus, quibus reges virique illuſtres alii ſtirpes ſuas recenſuerant, partim quae ex antiquis cantilenis rhythmisque, oblectationis cauſſa quondam decantatis, ad memoriam poſteritatis peruenerunt*: *quamuis autem*, inquit, *plenam haruncce rerum ſcientiam polli-*

(8) Vide Thormodi Torfaei prolegomena in hiſtoriam Noruagicam et Orcadenſem. (9) A. C. 1117. Thorm. Torfaeus in ſerie regum Daniae l. 1. c. 4. Prolegomenis Hiſtoriae Noruagicae p. 4, Arngrimus Ionas in Crymogaea et ſpecimine Islandico (10) A. C. 1241. caeſus. Ioannes Peringskiöldus Praefat. in Snorronem et Torfaeus l. c. (1) Hiſtoriae Noruagicae t. 1. p. 1.

polliceri non audemus, exempla tamen haudquaquam nos deficiunt, quibus certiores reddimur, viros olim eruditiſſimos fidem talibus habuiſſe. Similiter in Danis Saxo Grammaticus, (2) Snorroni quidem nullo modo comparandus, et teſtatur in praefatione, vetera carmina ſe reſpexiſſe, et ipſo in opere exhibuit. Non eſt neceſſe, vt addam aliquid de Gronlandis, quorum carmina Thornmodus Islandus(3) edidicit et in hiſtoriam transtulit. Tenemus initium vndecimi ſeculi, cum, quidquid veri, rumor et fabulae continere viderentur, in hiſtoriam congeri coeptum eſt. Ex eo tempore ſeptemtrionalis hiſtoria firmioribus ad fidem monumentis ſeſe extulit. Nam in ſuperioribus temporibus, tametſi operam omnem atque ingenium viri boni adhibuerunt, tamen non modo in vetuſtis fabulis, ſed in propioris aetatis carminibus et fama, facile fuit falli. Snorro in praefatione ſic ratiocinatus eſt ſecum: *haud dubitamus, ſingula illa, quae in carminibus traduntur, de expeditionibus rebusque geſtis, veritati conſentanea ducere: quamvis hic poetarum mos ſit, vt eorum, quae ſibi propoſuerant, encomia, ſummo decantent opere, vix tamen crediderim, quemquam auſurum fuiſſe, domino ea narrare facinora, quae auſcultantibus pariter et ipſi falſitatis vanitatisque nomine perſpecta forent, quippe in dedecus potius, quam laudem vergentia.* Prudentem virum audio et recte ſecum ineuntem rationes, ſed quae non

(2) A. C. 1193. Stephanus Stephanius in prolegomenis p. 21. (3) A. C. 1030. Arngrimus Ionas in ſpecimine Islandiae hiſtorico p. 151.

item omnium carminum auctoritati inſeruiant. Quot enim poetae de vetuſtis ante ſe rebus cecinerunt, qui fallerentur ipſi, qui ne pudorem quidem mentiendi haberent, cum propter rerum vetuſtatem, nemo eſſet, qui eos refelleret! Si Theocritus in Ptolemaei Philadelphi encomio, ſi in Olympionicis ceterorumque ludorum victoribus Pindarus nihil falſi rebus ipſis, quas tractant, admiſcuerunt, non tamen iisdem crediderit in ceteris, quae ex ſuperiori memoria interſerunt. Nempe omnibus in gentibus, quanto longius aetas nepotum a maiorum temporibus abfuit, tanto intentius accepta a parentibus, in foro, circulis, conuiniis perſonuerunt: et amiſſa etiam continenti memoria, quaedam magnarum rerum ſcintillae in animis hominum exſtingui non potuerunt. Haec quia tamquam e longo interuallo vix noſcebantur, vt obſcura et male cohaerentia, aucta deinde ſolertia captantium e vanis miracula, multo incertiora euaſerunt, quam fuerant dudum. Multum igitur refert, quis iſta tum lubrica tractarit. Saxo Grammaticus vſum ſe ſcribit Thulenſium, ſic enim Islandos vocat, narrationibus: iisdem vſus eſt Snorro Sturlaeus. Vide quid homo homini discrepet: plane inter ſeſe non conueniunt. Quare aut Saxo deprauata carmina et figmentis ſcatentia integrioribus praetulit, aut diuerſa miſcendo, ab ratiociniis ſuis decluſus concidit. Quamobrem tantopere indignatus eſt Ionas Iacobus Venuſinus hiſtoriographus Regis Daniae, quod Saxo Scal-

dro-

drorum carminibus nimium tribuerit, *quaedam enim*, inquit, *eiusmodi ſunt*, *vt apertae veritati vim faciant*: *quae ſi pro veris acceptaremus*, *nae nos in hiſtoria nihil vidiſſe videremur*. Multo grauius in eum inſurgit Angrimus Ionas apud Stephanium (4) qui ei ne quidem viri boni nomen relinquere videtur. Sed Saxonem etiam in propioris memoriae rebus, his ipſis rebus coaeui ſcriptores condemnant. Neſcio tamen, an eruditio ab Romanis Graeciſque monumentis intemperanter a quibusdam ad fabulas adhibita, plus mali importarit, quam aliorum vanitas. Multa eiusmodi ἐπαυλοφώρῳ deprehendi. Ioannes Lyſcander, qui tantum ſibi in Danica hiſtoria permiſit, Saxoni Grammatico iraſcitur, (5) quod toto in opere Cimmeriorum memoriam, ac ne Cimbrorum quidem apud Danos vel Islandos inuenerat, vt nec Snorro Sturlaeus. Poſt Saxonem docti homines, cum ſibi aliquid apud Romanos Graecosque viſi ſunt reperiſſe, hanc partem benigne expleuerunt, ſed medius fidius admodum imprudenter: inde aliis audacia, vt eam quoque veluti antiquam ſeptemtrionalium gentium famam venditarent. Cum Arngrimus Ionas in Crimogea oſtendiſſet, Islandiam Noruagicorum ſcriptorum teſtimonio ab A. C. 874. primum coli coepiſſe; e contrario Ioannes Iſaacus Pontanus in commentario de inſulis borealibus omnem eam monumentorum Islandicorum fidem idcirco conuulſam

(4) In Prolegomenis p. 36. 37. (5) Antiquitatum Danicarum ſermone VIII. p. 69.

ſam voluit, quod Thules mentionem iam Graeci inieciſſent et in iis praeſertim Pytheas. Scilicet multa apud antiquos eſt memoria Tules, quam cum Adamus Bremenſis comperiſſet, Islandiae attribuendam iudicauit. Eum ſecuti ſunt alii, vt ne dubitarint quidem ita eſſe. Peperit haec diſputatio inſignem librum Arngrimi Ionae, quod ſpecimen hiſtoriae Islandicum inſcripſit, in quo libro mihi Pontano ſatisfeciſſe videtur, nihil ad Islandiam pertinere Thulen demonſtrans et potius Britannicis inſulis eſſe inſerendam. *Venit deinde* tamquam in controuerſi et vacui nominis poſſeſſionem Olaus Rudbeckius, (6) qui id ipſum toti Scandinauiae vindicauit. At Thormodus Torfaeus (7) ſpecie concedentis tam graues difficultates Rudbeccio mouit, vt Thule citius Islandia ſit, quam Scandinauia. Tamen ſibi quoque obſtare veterum loca ſenſit, vir veritatis, ſi quis vmquam, ſtudioſiſſimus, Torfaeus. Scilicet ne veteres quidem de vna et eadem inſula id nominis vſurparunt, vt iam tum in vocabulis quibusdam ingenioſe ludere ſunt ſoliti. Serius item ab externa eruditione, ſed tenui illa atque ex ſangui, Dacorum nomen Danis tributum eſt. Vetera monumenta ignorant: recentiores quidam errorem iſtum gratanter acceperunt, non modo iam nomen ſolum, verum etiam res Dacorum ad Iſtrum geſtas, Daniae vindicantes, quos quidem grauiſſimis verbis Ioannes

(6) In Atlantica cap. de Thule p. 514. (7) Hiſtoriae Noruagicae T. 1. p. 10. ſeq.

nes Iſaacus Pontanus exploſit. (8) Sed infinita ſunt, in quibus immatura eruditio ſeptemtrionalibus hiſtoriis nocuit. Quae cum ita ſint, vt omni in fabula, ita in Othino, quantum humana mens cauere poteſt, prouidendum eſt, vt non minus ſequioris aetatis commenta, quam ab eruditione petita pigmenta, a vetuſto rumore ſeiungamus.

Complures Odinos in monumentis ſeptemtrionalibus commemorari, Ioannes Schefferus, (9) et Olaus Verelius (10) obſeruarunt, ne dicam alios. Saxo Grammaticus viſus eſt ſeptem eodem nomine et honore diuinitatis inſeruiſſe. Thormodus Torfaeus (1) tamen, re accuratius conſiderata, vnum vbique Othinum deprehendit. *Quod autem*, inquit, *Odino ſuo tam prodigioſam aetatem adſcripſerit, in eo illum parum circumſpectum fuiſſe confiteri conuenit.* Nempe, cur Saxoni non liceret in Othino deo, quod Graeci in Ioue, Apolline, ceterisque diis immortalibus ſibi permiſerunt, vt non modo iſtis temporibus, quibus hi heroes fuerant in hominibus, ſed multis etiam ſeculis poſt producerent adulteros. Sin a Saxone diſcedas, trium praecipue aut duorum Othinorum memoriam priſcam exſtare inuenies: nam ſi Mithodinum excipias, Odinus Priſcus et Odinus Vpſalienſis relinquuntur. Hanc Brynolfi Suenonii ſententiam placuiſſe video Nicolao Kedero, ſummi ingenii, eruditio-

(8) p. 640. (9) In Vpſalia c. 7. (10) In hiſtoriam Gothrici et Hrolfi p. 40. (1) In Dynaſtiarum Daniae ſerie l. II. c. 5.

ditionis autem excellentis viro. (2) Equidem illum Vpſalienſem vulgo dictum ſolummodo inter mortales exſtitiſſe puto et ab eodem ſuperſtitionem manaſſe, donec procedente tempore ſe ipſo antiquior et verus deus crederetur. Snorro Sturlaeus in hiſtoriis Noruagicis Odini Vpſalienſis famam ex Arrio Polyhiſtore conſignauit, in Edda autem Odini Priſci, ſeu eiusdem Odini, qui iam haberetur vt vetus deus. Sed cum Snorro, Odinum ex priſcis ſedibus in ſeptemtrionem vt dededuceret, regionum ſitum deſcribit, *manifeſtum* eſt, eum ab eruditione tenui litterarum Latinarum, qua iam tum aliqui in Noruegia calebant, ſic deluſum fuiſſe, vt tamen etiam hic aliquid veteris famae ſubodorari queamus. Tanto diligentîus expendenda erunt omnia. Oceanum, inquit, ambire terram, atque maria ſua paſſim in ſinus diffundere: ex his eſſe mare a *Noruaſund*, ſeu *Gaditano freto*, vt Ioannes Peringſkiöldus V.C. explicuit: iſthinc ad Palaeſtinam vsque protendi atque inde in longitudinem porrigi, aquilonem verſus, Mare Nigrum, ſeu Pontum Euxinum: ad boream iuxta Mare Nigrum eſſe *Suioniae*(3) regnum, quod quidam vaſtae *Serklandiae* (4) comparent, alii *Blalandiae*,(5) quam Peringſkiöldus *Aethiopiam* interpretatur: ſeptemtrionalem plagam propter intenſiſſimum frigus et inclementiam caeli incultam iacere,

(2) In numo aureo Othini p. 3. conf. Noua Litteraria maris Balthici A. 1700. p. 363. (3) *Suitiot*. (4) *Serkland*. (5) *Blaland*.

iacere, Africam ad meridiem torreri aeſtu nimio ſolis: plurimos in Suionia eſſe tractus, diuerſis diſtingui linguis et varia populorum multitudine abundare: eſſe iſthic gigantes, pygmaeos, pugiles ſubfuſci coloris, gentes prodigioſas, tum ſerpentes ſtupendae magnitudinis. Ex montium borealium iugis deſcendere Tanaim, olim dictum *Fanaquisl*, ſeu *Vanaquisl*, (*Vanorum fluuium*) qui per *Suitiot* deuectus in Mare Nigrum ſeſe exponeret: regionem huius fluuii brachiis interclusam, *Vanaland*, vel *Vanabeimur*, *Vanorum terram* dici. Ab Tanai illo tres orbis regiones diuidi et Europam ab Aſia diſcerni.

Hanccine adeo formam terrae Snorro Sturlaeus paullo ante A. C. 1241. edere potuit? Nempe nihil eorum dicit, quae tum propter crebras Scandinauorum terra marique profectiones nota erant: libellis quibusdam lepidis hercle et eruditis auſcultare maluit. Septemtrionalem tractum habitari poſſe negat, et neſcio quae monſtra iis in locis diſſeminat. Quid autem? nihilne ei Biarmiae ſeu Permiae, ad borealem vsque oceanum cultae, in mentem venit? quam vero Noruagos ad quaerendas ſibi diuitias nauibus adiiſſe, vel ex Snorrone conſtat. Minime gentium, audiendi erant potius illi, qui ex Graecis Latinisque hauſerant. Hi vero ſeptentrionem omnem ſolitudine et terroribus immitis caeli implerunt, hi, teſte Euſtathio Theſſalonicenſi in praefatione commentario-

rum

rum Iliados, ſolitudines mapparum ſuarum, pygmaeis atque aliis iſtiusmodi monſtris exornarunt. Tanais Europam ab Aſia discernit: recte, ſi Strabonem (6) audias. Tanais item tertiam orbis regionem a duabus? nempe ingenioſum hoc eſt. Ex borealibus montibus Tanais in Pontum Euxinum deſcendit, Pontus, vt verba Snorronis non obſcure indicant, in ſeptemtrionem extenditur. Sunt haec eiusmodi, quae ex fabulis Argonauticis orta, ſitum harum terrarum ſic interuerterunt, vt Pontus Euxinus haud longe abeſſet a boreali oceano, de quo errore ſaepius monui. *Sed* vt hic Snorronis magiſter Herodoteam orbis terrae diuiſionem, quae apud optimum quemque veterum Geographorum locum inuenit, ſecutus eſt, ita etiam ex Ephoriana aliquid recepit. Nam Ephorus orbem terrarum in quatuor partes diſtribuebat, (7) Celticam ab occidente, Scythiam ſub ſeptemtrione, et ſub illis Aethiopiam et Indiam. Aethiopia magiſtro Snorronis, fuit *Bla-land*, ex Scythia, propter tenuem conuenientiam vocis, factum eſt *Suitiod* et ex *Scythia magna*, vt fautores Ephorianae ſententiae loquebantur, *Suidiod Miklu*. *Serkland* Ephoriana eſt India. Peringskiöldus ad Theodorici regis vitam, (8) cum ex Hialmteri regis hiſtoria refert, Ingonem Mannaheimiae regem filio ſuo claſſem tradidiſſe, cum qua in Arabiam, Sarklandiam aliaque loca orientalia

(6) p. 338. 339. (7) Confer ea, quae diximus in Memoriis Scythicis p. 354. ſeq. et p. 386. (8) p. 407.

talia proficiſceretur, *Sarklandiam* explicat *Sarckedoniam*, ſiue *Carthaginem Africae*. Quidquid ſit de illa expeditione, *Sarkland* et *Serkland* profecto non poteſt fieri, vt ſit regio aliqua alia quam ἡ Σηρικὴ, *Serica*. In commentationibus de Serica et Seribus oſtendam, regionem illam, ob mercaturam Serici celebratam, ab Meſopotamienſibus, qui eam exercebant mercaturam, شرق et شرقة *Scherk*, *Scherkah*, *Scharkeh*, id eſt, *orientem* fuiſſe dictam. Et fuit quidem illa regio non ita ampla vt India, tamen fama ſui nominis ſub Auguſto Caeſare et poſtea Romanum orbem impleuit. Idcirco auctores, quos Geographus Rauennas ſecutus eſt, (9) Indiam et Sericam vno nomine comprehenderunt, *Indiam Sericam* appellantes. Et commode hoc accidebat Ephorianae ſententiae ſtudioſis, quod priſci Geographi, vt Ptolemaeus, Agathemerus, Marcianus Heracleota, infra Scythiam protenderent regionem Sericam, vt India Ephori facile poſſet cedere nobiliori nomini Sericae. At enimvero, inquies, potuitne Ingonis, Manheimiae regis, filius nauibus ſuis proficiſci vsque in Sericam, ſiue Indiam? Scilicet, ſi nihil aliud ſententiae meae obſtet, vtut concedam, vera iſta eſſe, quae de Ingone hoc referuntur, neque enim a fide abhorreo, tamen nihil abſurdi ſentio. Recognoſcite mecum veterum Normannorum nauigationes, vim atque audaciam. Primos omnium Europaeorum in Americam nauigaſſe, vtcumque aliquis mirabi-

 tur,

(9) Vide eum in primis p. 43. ed. Porch.

tur, Snorronis auctoritate moueor, vt credam. Quidni iidem pro reliqua fortuna ſua et incredibili audacia viam inuenerint circum Africam nauigandi? Id ego autem nunc non poſtulo, magis enim inclinat animus, vt credam, eos primum petiiſſe Alexandriam, deinde ex ſinu Arabico nauibus fuiſſe deuectos in Indiam, Sericae mercaturae cauſſa.

Poſtquam Snorro orbis terrarum ſitum confuſis inter ſe vetuſtatis lineamentis depinxit, regionem, ex qua Othinum profectum compererat, ſubobſcure item monſtrat. Terram, inquit, ad orientem Tanais exſtitiſſe, nomine *Aſa-land*, vel *Aſaheimur* et metropolin eius *Aſgard*, in qua et princeps fuerit nomine *Odinn* et locus ſacrificiis cultuque deorum celebris. Cum principe fuiſſe duodecim praefectos, quos ipſi *Diar*, *edur Drottnar* vocarint, quiue curam ſacrorum geſſerint, et ius dixerint populo. Odinus longinquis peregrinationibus belliſque nobilitatus multas victorias reportauit, multa regna ſibi ſubiecit, ex quo fama fuit, vbi pugnaret, ab ea parte ſtare victoriam. Tandem exercitum ſuum eduxit (*bendur Voenum*) contra *Voenos*, qui regni ſui fines valide tutati ſunt. Rurſum, inquit Snorro, ab ortu ſolis aeſtiui vsque ad occaſum ſolis hiberni longiſſima montium iuga procenduntur, diſterminantia *Suidiod Miklu*, *Scythiam magnam* a ceteris regnis. Haud ita procul ab horum montium auſtrali parte, *Teucria* eius ſita eſt; ibi

ibi magnos quoque tractus poſſidebat Othinus. Verum enim vero plena haec ſunt praepoſtero πολυϊστορίας ſtudio. Quoniam ex veterum geographorum ſententia Tanais Aſiam ab Europa diſterminabat, iſthuc autem vocabulum *Aſia* cum *Aſarum* nomine congruebat, inde tenui ratiocinio Aſae viſi ſunt ex Aſia profecti. Ita Georgius Hickeſius: (10) *Famoſus ille Othinus et eius aſſeclae ſe pro deaſtris ſeu diis aut ſemidiis venditantes ex Aſia oriundi ſunt; itaque As in plurali Aſer diis ſeptemtrionalibus nomen gentile erat.* Contra ea Gudmundus Andreae Islandus, in notis, quae *Voluſpae* a Petro Reſenio ex Saemundi Edda editae ſubiunguntur, (1) *Ab Aſa Aſia, ſolum diuinum, ſacra terra: non hi ab Aſia nomen, ſed regio ab illis ſuſcepit.* Haud eo inficias, *as*, dei, et *aeſer* deorum nomen veteri lingua, non modo Scandinauica, ſed etiam Celtica viguiſſe. Heſychius Αἰσοὶ, θεοὶ ὑπὸ Τυῤῥηνῶν. Suetonius Tranquillus in vita Caeſaris Auguſti: (2) *Aeſar Etruſca lingua deus.* Inde *ara* quoque videtur dicta, et priſcis Italis *aſa*, Numae Pompilii lex: (3) PELEX. ASAM. IVNONIS. NE. TAGITO. *Pellex aram Iunonis ne tangito.* Sic: *Furii, Valerii, ero, mures, melior, foederum, plurima, arena,* vulgo apud priſcos Romanos, et in Saliorum carminibus, (4) dicta ſunt, *Fuſii, Valeſii, eſo, muſes, foedeſum, pluſima, aſena.* Apud Turcas اس *as*, parum,

(10) In theſauro linguarum ſeptemtrionalium t. 1 p. 193. (2) ad v. 80. (2) c 97. (3) Apud A. Gellium. l. IV. c. 3. (4) Varro apud Macrobium l. III. c. 2. et de Latina lingua l. VI.

rum, *parcum*, apud Slauonos *as*, *vnum*, ſicuti apud Ruſſos *odin*. Sed vt Aſiam ab iſtis diis, vel deos ſeptemtrionales ab Aſia fuiſſe dictos exiſtimemus, maiori opus eſt vi ad perſuadendum nobis. Potius ego, vt paullo ante dixi, ea in ſententia ſum, conuenientiam tenuem ſoni in vtraque voce, erroris cauſſam exſtitiſſe, vt Othinum cum aſis ſuis ex Aſia repeteret ille Polyhiſtor Arius, cui aurem praebuit Snorro. Sed multo grauius peccatum in *Teucris*, cuius nominis tanta non eſt cum *Turcis* ſocietas. Vbi a Perinskiöldo *Teucria* editur, ibi ipſo in Snorrone eſt *Tyrkland*. (5) Nimirum poſtquam Illuſtris Stiernhielmus (6) coniecturam expediuit, *Turcas* vetuſtis ſeptemtrionis monumentis celebratos eſſe, digna viſa eſt Peringskiöldo coniectura, quam ſequeretur. Alio loco vbi Snorro de Leifuri in Vinlandiam profectione agit, comes eius commemoratur *Turkir Sudurmadur*, (7) ibi Peringskiöldus: *ſociorum vnus Turkirus*, omiſit enim in Latina verſione, *vir e regione meridionali*, quod in Suedica interpretatione exſtat. Mihi vero nihil aliud dicere voluiſſe Snorro videtur, quam *Turcam ex auſtrali terra*. Neque illud *Tyrkland* quidquam aliud eſt, quam *Turcia*, non illa in Turkeſtan, ſed ad Danubium et Danaſtrim et Danaprim Tanaimque et in Cherrhoneſo Taurica. Cherrhoneſum et ſuperiores regiones vsque ad fontes Tanais, vt a Conſtantino Por-

(5) t. 1. p. 5. 25. (6) Apud Olaum Verelium ad Heruorar Saga p. 5. ſeq. (7) T. I. p. 332.

Porphyrogennetta deſcribitur, Chazari tenuerunt, multis ante hunc Imperatorem aetatibus ex Turceſtania profecti. Theophanes Byzantius: (8) τὺς Τύρκυς ἀπὸ ἑῶας, ὓς Χαζάρυς ὀνομάζυσιν εἰς συμμαχίαν ἐκαλεῖτο. Et lingua Chazarorum nulla alia, quam Turcica fuit, quod multis exemplis conſtat. Quocirca etiam liber Coſri, qui disputationem Iudaei cum Chazaro continet, Turcice ſcriptus fuit. Supra Chazaros Turcae alii, eorum cognati, a fontibus Tanais vsque ad Iſtrum conſederunt. Et tametſi, quod ex Conſtantino Porphyrogenneta conſtat, circiter A.C. 893 a Pazinacitis toto illo agro eiecti fuerunt, tamen ad Iſtrum et in Pannonia ſedes ſuas collocarunt. Ex hac igitur regione priſca fama Othinum eduxit, in qua cum Turcas viderent colere, eo *Tyrkland* nomen regionis, vt tum erat, ediderunt. Vox illa *Diar* Turcica reuera eſt, et *domus complures*, *regionem*, *prouinciam* ſignificat. Sic ديار بكر, *Diar Bekir*, ديار ربيعة, *Diar Rabia*, ديار مصر, *Diar Mezir*, الجزيرة, *Algjezira*. Praeterea in dignitatum nominibus videtur fuiſſe, iſthuc *Diar*: nam et Kioniae Princeps Oſcoldus, qui circiter A. C. 865. fuit, *Diar* in Ruſſicis Annalibus vocatur, quod nominis, imitatione Turcarum geſſiſſe videtur. Tenemus igitur regionem, quam Getae Scythaeque incoluerunt iis temporibus, quibus Othinum fuiſſe, fama perhibet. Non nego, Snorronem Tyrklandiae nomine aliam regionem in animo habuiſſe.

 Nam

(8) p. 263.

Nam cum de Othini expeditione agit, eam ad orientem Tanais collocat, Othinumque profectum dicit *fürſt veſtur in Gardariki, oc tha Sutbur i Saxland*, (9) *primum, occidentem verſus in Gardarikiam*, (quae nunc media Ruſſiae regio eſt) *deinde meridiem verſus in Saxoniam.* Scilicet cum illius aetate, Turciae eius, quam modo commemoraui, iam obliterata eſſet memoria, contra ea Turcae orientales celebrarentur, eodem ſe vertit Snorro. Sed ſi ex Getis fuit Othinus, non iam mirum eſt, ſermonem illius tam in Germania quam in Dania et Scandinauia, peregrinum fuiſſe viſum, ita tamen vt non plane abhorreret ab his linguis, quemadmodum Turcica. Teſtantur ſane ſeptemtrionales, diuerſam illius fuiſſe linguam, eamque *Aſamal*, *Aſarum ſermonem* vocant. Olaus Verelius, (10) poſtquam oſtendit, ſibi cum Arngrimo videri, ab omni aeuo in ſeptemtrione hanc linguam Noruagicam obtinuiſſe, (id autem mihi quodammodo a vero non videtur alienum eſſe) Eddam producit his verbis: *Aſiatici matrimonia in his terris inierunt, genusque ſuum in Saxonia et arctoo orbe admodum propagarunt: ſola ipſorum lingua hic in vſu fuit: et ſatis liquet, quod in ſeptemtrionem linguam ſuam intulerint per Noruegiam et Daniam, Sueoniam et Saxoniam.* Eo in loco ipſa Noruegica lingua ex *Aſamal* orta atque facta dicitur. At Verelius, ſeu diſſimulans Eddae auctoritatem, ſiue aliquem eius errorem ſentiens, ita fatur: *Vocabatur haec lingua Aſamal, hoc eſt, Aſiatico-*

(9) p 5. (10) In hiſtoria Gothrici et Hrolfi p. 2.

ticorum ſermo: ſed a priori, non niſi dialecto differebat: vtriusque enim communis mater Scythica fuit: ſi quid autem peculiare poſterior haec habebat, vulgo id minus receptum, Scaldis tantum frequentabatur, nouo hoc lepore carmina ſua condire ſtudentibus: quae propterea minus facilia intellectui, noſtro praeſertim aeuo, cum vulgaris pariter ac poetica dictio vetus in vſu eſſe deſiit. Eddam cum citet, prologum eius dicit, quem alibi merito exſibilat. Eo in prologo, Olai Magni codices haec tantum habent: *ex indigenis ibi Aſae vxores ſibi et filiis ſuis delegerunt, vt hae familiae intra breue tempus per Saxoniam et omnem orbem Arctoum diſpergerentur et lingua Aſianorum facta eſſet propria at communis omnibus has terras incolentibus.* Codex vero Regius et Stephanius non modo iſta addunt, quae Verelius produxit, ſed etiam alia. *Noruegis, Suecis, Danis, Anglis. Quod confirmant litteris mandata priſcorum Aſiaticorum nomina propria, quae vna cum hac lingua Aſiae, in ſeptemtrionalia haec regna, Noruegiam, Sueciam, Daniam et Saxoniam transtulerunt, occurrunt etiam in Anglia locorum et vrbium vetuſta nomina, quae alia lingua, quam ibi iam viget, videntur indita.* Totum locum, at iterum in medio omiſſis quibusdam verbis, Ioannes Peringskiöldus produxit, (1) vt oſtenderet, mox ab Odini profectione, ſermo-

(1) Ad Theodorici vitam p. 353. Idem ex alio MS. veteri p 354 haec adfert: "Omnes hiſtoriae et relationes, quae lingua Noruegica conſcri-" "ptae ſunt, atque veritatem comitem habent, a Turcarum et Aſianorum in" "Septemtrionem migratione ibidemque habitatione initium ſumunt: quapropter" "vere

ſermonem illum, *per vniuerſam Germaniam, Galliam et Britanniam mox propagatum fuiſſe*, a qua opinione Verelius abhorruit. Quid autem in ea eſt, quod aliquis probet? Si Odinus toto cum populo ſuo, Pompeii, vt nobis concedunt omnes, aetate, in ſeptemtrionem conceſſiſſet, non potuiſſent tamen Germani Aſarum ſermonem tam cito cognoſcere, vt eodem iam ſub Iulio Caeſare et Auguſto vterentur omnes. Locutos autem inuenio eam linguam, quae nunc fere eſt. Non adeo confeſtim magnis in populis veteres linguae intereunt, nouae recipiuntur: non tantum alicuius tyranni imperium valuit, quae natura ſua fieri non poſſunt, ea vt impetraret. Redeo igitur ad Verelium, qui *Aſamal* dialectum diuerſam eſſe concedit, eandem tamen linguam eſſe contendit: *nam* inquit, *vtriusque mater Scythica fuit.* In eo petit ſibi concedi, quod maxime controuerſum eſt. Non video, quemquam Scythicae linguae rationes tam congruentes Scandinauicis et Teutonicis reperiſſe, vt Lithuanicae Mathaeus Praetorius in Orbe Gothico demonſtrauit eſſe. *Lapides* Praetorio minatus eſt Peringskiöldus, forte mihi alius minabitur. Enimuero his armis non opus eſt, non defenſoribus illis. At ipcari video Peringskiöldum atque addere, *litteratos*. Ne illis quidem ob-

"vere dicendum eſt, eam linguam, quam Noruegicam vocamus, ipſos ſecum "hnc in aquilonem transduxiſſe, quae lingua poſtea Saxoniae, Daniae, Sueciae, Noruegiae et alicui parti Angliae communis facta eſt. Huius populi "princeps erat Odinus Thori filius.

obruetur Praetorius. Sed Scythiam Verelius non dicit eam, quae ſola fuit Scythia, vt ex Herodoto patefecimus, verumEphorianam illam, reuera autem, niſi antiquiſſimo cuique ſuae gentis auctori refragetur, Turciam. Dicat mihi nunc quisquam, quemadmodum Turcica lingua mater et Germanicarum et Scandinauicarum eſſe potuerit: aut quemadmodum ſola dialecto discrepet.

Qui *Teucriam* ex *Tyrkland* excuderunt, iidem hanc orientis regionem a Snorrone deſignatam ex oculis relinquunt, aliam ſine duce quaerunt. Peringskiöldus ad Theodorici regis vitam (2) hunc ex Heruarae hiſtoria locum produxit: *theſſu ſamtüdä komm auſtan Aſiae menn oc Tirkiar oc bigdu Nordurlaund*, atque ita latine conuertit: *circa idem hoc tempus ex oriente aduenerunt Aſiani atque Turcae*, (i. e. *Teucri, Troiani*) *qui boreales has oras excolere coeperunt.* Verelius, cum Heruaram ederet, nihil de Teucris et Troianis ſuſpicatus eſt. (3) Mutata ſcena eſt per Stiernhielmi coniecturam. Huic autem coniecturae patrocinabatur vetus opinio, Othinum a Troia et ex Phrygia fuiſſe profectum. Quantum Troia diſtat ab oriente Tanais, in qua regione iidem Asgardum ſitum fuiſſe prodiderunt?

qua opera ſi credam illis,
Vna opera alligem canem fugitiuam agninis lactibus.

(2) p. 352. (3) p. 6. 37. 38.

Fuerunt igitur eruditi viri, vt aetas quaeque tulit eruditos, qui Homericis delectati Muſis hoc totum excuderunt. Qui vero? nempe vel ſolum nomen *Fryggae*, quae Othini fuit coniux, admonere eos Phrygiae potuit; ſaepe enim multae atque longae vna ex voce cuſae ſunt fabulae. Et cum *Asgard* adeo celebraretur, pro ingenio iſtius ſeculi, nullam aliam vrbem, quam Troiam recordabantur. Vetus tamen iſta eſt opinio. Non ego heic ad prologum Eddae prouocabo, in quam Olaus Verelius vehementer inuectus eſt. (4) *Maximam*, inquit, *prologi iſtius partem*, *vtpote adulterinam et a ſciolo quopiam ex mythologia Graeca et Latina conſutam non agnoſcit genuina Edda Snorronis*. Attamen etiam genuina in Edda, mythologia ſeptima haec inuenio: *in medio orbe Borſonii condiderunt Asgardum dictam*: *haec Troia erat*. (*Asgardur*, *thad er Troia*). Quod Olaus Magnus *medio in orbe* reddidit, in Snorrone eſt, *i Midum heime*. Quid ſi iſthuc potius tamquam proprium nomen edidit Snorro? quid ſi *Media* ea ſit? Nam tali in eruditione, qualis tum obtinuit, mirum non eſt, ſi quis in Noruegia atque Islandia crediderit, Turciam et Mediam eandem eſſe regionem, eandem deinde Teucriam et Phrygiam, ibi Troiam fuiſſe celebrem vrbem. Et potuit ab illis totum hoc ad Tanaim reiici, quando Geographus Rauennas, aptiſſimus ſeculo ſuo auctor, ſic ait: (5) *iuxta regionem Maeotida eſt patria maxima, quae dicitur Dardania.*

(4) In notis ad Heruarur Saga c 2. adde p. 5. (5) p. 141. ed. Porch.

dania. Eſt haec Dandaria, de qua ſupra diximus: at Rauennas ille profecto *Dardanos* ſibi viſus eſt deprehendiſſe: quid enim aliud ſibi velit iſthuc *patria maxima?*

Venit mihi hoc loco in mentem Platonis in ſecundo de Republica dictum: primum quidem et vel maxime reprehenſionem habere, ſi quis mentiatur, praecipue tamen, *ἐόν τις μὴ καλῶς ψέυεϑαι.* Quid autem poteſt eſſe imperite mentiri, ſi haec, quae produximus, aliquid ingenii habent? Non eſt ita deplorata hiſtoria Romana, vt Q. Pompeii temporibus, aliquod nomen fuiſſe vel Dardanum vel Teucrium putemus: non illa tunc Troia fuit, vt Asgardi gloria, vel Othini regia, eius vaſtitati conueniat. Neque Turcia illa Orientalis Romanorum vmquam arma audiuiſſe videtur. Getae vero ad Iſtrum ſenſerunt etiam iis temporibus, quibus fere Pompeius fuit, cum, vt ex Appiani Alexandrini Illyricis conſtat, bella in Illyrico Romani geſſerunt. Snorro Sturlaeus, (6) de aetate Othini ſic teſtatum reliquit: *per id tempus, Romanorum imperatores arma ſua, longe lateque per orbem circumferentes, cunctas nationes ſub iugum miſere: quo fiebat, vt poſſeſſiones ſuas multi domini deſererent. Romani imperatores*, Snorroni, *Rumveria Höſtingiar*, vocabulo aptiſſimo ad rem et ampliſſimi ſenſus, vt quemcunque magiſtratum Romanum contineat. Prologus Eddae diſerte Pompe-

 ium

(5) T. I. p. 5.

ium nominat, quod item ab eruditione Romana petitum eſt. Neque aſpernantur hanc aetatem doctiſſimi viri, neque nos ſane refragamur. Nam poſtquam ex multis difficultatibus, quae Othinum circumſident, eluctati ſumus, nihil inuenimus, in quo acquieſcamus, niſi Geticas gentes et hoc fere tempus, cum tantae Getarum vires, vt ſupra diximus, in Scythicos populos incubuerunt. Inprimis autem Othinus Neuros forte et Gelonos ſemigraecos ex ſedibus ſuis excitaſſe et cum Getis ſuis ſeptemtrionem occidentemque verſus duxiſſe videtur, fortaſſis etiam Scythis multis ſigna eius ſequentibus. Nam quod ex Herodoto conſtat, Budini, Neuri, Gelonique in Scythico nomine et corpore olim continebantur, cum origine Scythica non eſſent, lingua quoque vterentur alia, quam Scythica. Itaque in incorrupta fama apud Snorronem, Vani illi et Voeni, quibuscum foedera conſociauit Othinus, diuerſi ſunt ab incolis Gardarikiae, quae regio tum vtique a Scythis tenebatur. Recolamus nunc ex Herodoto, qui mores Neurorum maxime, quae ſtudia praeſtigiarum illo in populo fuerint, eaque conferamus cum Voenis Snorronis, (7) aut cum his Fennis, qui nunc ſunt. Ne λυκανθρώπυς quidem Neurorum obliuioni traditos reperiemus. Quare hi mihi cum Budinis et Gelonis Voenorum populus fuiſſe videntur, ſiue Fennorum. Fennos autem paullo poſt hanc aetatem, Romanis referentibus et cum pri-

(7) T. I. p. 3. ſeq.

primis Cornelio Tacito, ad Viſtulam totaque in Polonia vagantes reperimus, neque alii nunc mihi videntur Aeſtii fuiſſe in Pruſſia et Curonia, *orientales* dicti GermanisBalthici maris accolis, commodo ad ſitum vocabulo. Cum Getis autem Othinus videtur reliquam migrationem confeciſſe. Eſt deinde in Othini nomine aliquid, quod, cum Budinos praeſtigiatores cogito, non puto penitus eſſe diſſimulandum. Ab Adamo Bremenſi et Varnefrido et in Genealogia veteri, quam Schefferus in Vpſalia produxit, Othinus vocatur *Wodan.* Ita paſſim ſcriptoribus, Germanicis praeſertim, *Vodan, Voden* et *Vodin.* Eggehardus Vragienſis ad A.C. 943. praedium Lutarii Comitis *Wodeneswego* commemorat, tamquam *Wodeni viam* dicas, iuxta *Sunterslewo*, oppidum. Si *Wodin* pronuncies, tum maxime iſthuc Βȣδῖνος ſeu *Vudinos* (vt veteres Graeci dicebant) auditur, nomen populi Budini. Fuere alii Budini trans Tanaim in Aſia ad Caucaſum, qui cum fere notiores ſint in iis ſcriptoribus, quorum ſecundum Herodotum monumenta exſtant, facile fallere potuerunt eruditos Noruagos et Islandos, illum praeſertim Polyhiſtorem, vt cum de Budinis fama exſtaret, non de his ad Boryſthenem, ſed de aliis ad Tanaim et Caucaſum cogitarint. Ceterum Getas, quorum ducem Othinum fuiſſe autumo, etiam alia tenuis fama indicat, eum de Thracibus admiſcetur, vt dicam poſtea. Praeterea hoc velim, vt quis in Strabone animaduertat, quanta Getici nominis ante eum poten-

tia fuerit, quam exiles autem poſtea vires exſtiterint: (8) αὐξηθέντες δ' οὖν ἐπιπλεῖστον οἵ τε Γέται οἵ τε Δάκοι, ὥστε εἴκοσι μυριάδων ἐκπέμπειν στρατείαν, νῦν ὅσον εἰς τέτταρας μυριάδας συνεσταλμένοι τυγχάνουσι, καὶ ἐγγὺς μὲν ἥκουσι τοῦ ὑπακούειν τοῖς Ρωμαίοις. *Cum autem Getae et Daci vehementer aucti eſſent, vt exercitum ad ducenta millia educerent, nunc ad quadraginta fere millia redacti ſunt, et prope abeſt, vt Romanis ſe ſubiiciant.* Quamobrem non eſt abſurdum ſtatuere, maximam Getarum partem cum Othino emigraſſe. Denique vt Snorro indicat, habitum praeſtigiis honorem fuiſſe in Othini populo, tamen illis in rebus ſuperiores et quaſi magiſtros exſtitiſſe Voenos, ſic Strabo (9) apud Getas, ἄνδρα γόητα, qui ex Aegypto diuinationes repetierat ſuas, hoc eſt, a populo alio, quam Getico, commemorat, cuius artibus Βοιρεβίστας princeps Getarum vſus, rempublicam eam formauerit. Et vt Othino iſtae praeſtigiae diuinitatis opinionem conciliarunt, ita Geticus populus ad honorem illum praeſtigiis deferendum procliuis in hoc vel Deceneo vel Ceneo fuit Strabo: Προσημασίας ἐκμεμαθηκώς τινας, δι' ὧν ὑπεκρίνατο τὰ θεῖα, δι' ὀλίγου καθίστατο θεός. *Diuinationes quasdam edoctus, per quas deorum reſponſa dabat, parum abſuit quin fieret deus.* Sed alio in loco: (1) ὁ παρὰ τοῖς Γέταις θεός, τὸ μὲν παλαιὸν Ζαμόλξις Πυθαγορᾶός τις, καθ' ἡμᾶς δέ, ὁ τῷ Βυρεβιστᾳ θεσπίζων Δεκαίνεος. *Deus apud Getas, olim quidem Zamolxes*

(8) p. 211. (9) p. 210. (10) p. 210. (1) 524.

Zamolxes ille Pythagoraeus, noſtra vero memoria Decaeneus, qui Byrebiſtae vaticinatur. Aetas hominis nos admonet, hunc Decaeneum fortaſſis ipſum illum Othinum fuiſſe, qui Voereuiſta rege occiſo, populo autem Getico diſſidiis diſtracto, migrationem eam ſusceperit.

Expoſui ſententiam, quae de aetate Othini communior in ſeptemtrione fuit, inque ea, quae vana eſſent, anniſus ſum expurgare, quae ſimilia vero, confirmare. Alia praeter hanc in prologo Eddae propoſita eſt. Oſtendi iam ſupra, quod Verelii de prologo iſto iudicium fuerit. Neque eo minus illuſtris Stiernhielmus ſuccenſuit (2) his prologi, ἱπαλεκτρυόσι, γρυπαιέτοις, τραγελάφοις;
Α ἐν τοῖσι παραπετάσμασι τοῖς Μηδικοῖς γράφουσι.

Tamen multi fuerunt, qui pleraque, vti veterem famam, reciperent. Itaque operae pretium eſt, vt arcana huius adyti patefaciamus. Apparebit enim, quibus *fornum bokum*, *libris antiquis*, vt Hervarae auctor loquitur, vſi fuerint ſeptemtrionales, quantumque cauendum ſit, ne eruditulis commenta amplexemur, pro vetuſta Scandinauicarum gentium fama. Nam ille prologi auctor Othinum Pompeii aetate fuiſſe ſcribit, eundem vero viceſimum a Priamo Troiano recenſet. Nimirum ex duabus ſententiis hic corrector fecit vnam. Si cuique patrum eius annos triginta dederis, erit ſum-

(2) Vide notas Verelianas ad *Heruarar ſaga* p. 5. ſq.

ſumma in Othino collecta ſexcentorum annorum. Et, ſi Troia capta ſit A. P. I. 3530. vt optimus quisque Chronologorum cenſet, illa ſumma adiecta, Othinus A. P. I. 4130. annorum fuerit triginta; hoc autem ab eo Othino, de quo diximus, interuallum eſt annorum amplius quingentorum. Biornus Ionae Skardſaeenſis, *maximus inter Islandos antiquarius*, vt eum Stephanus Olai ad Vaticinium Volae appellat, in commentariis ad Voluſpam, ex Saemundi Oddenſis annalibus Odinum Priſcum refert ad annum a Troia capta 667 hoc eſt, ad A. P. I. 4197. Eum et producit et reprehendit Thormodus Torfaeus doctiſſimus aeque Islandus, tamquam alicuius Islandi commenta pro Saemundi rationibus ſequentem: ipſe autem ita ſentit, vt in calculo annorum, annis in ſingulos diſtribuendis XXXV. ad A. P. I. 4230. excedat. (3) *Si*, inquit, *coniecturis locus eſſet*, *ſuſpicari liceret*, *cum Thraces Dario Hyſtaſpi circa haec tempora ſe dediderunt*, *regem eorum ab Thore Memnonis filio oriundum metu ſeruitutis in Scandinauiam conceſſiſſe*. Enimuero hic annus Torfai iam in Xerxem regem congruit, non in Darium. Genealogiam regis Thracici a Thore Memnonis filio non huius facimus, neque cetera moramur. Nam mythologus aliquis Noruagus hic videtur in Herodoto Budinorum migrationem in alteram Boryſthenis ripam reſpexiſſe, quam ad A. P. I. 4168. con-

(3) In Serie regum Daniae p. 120. In Hiſtoria Noruegica Parte I. p. 138.

contigiſſe, in Chronologia Scythica diximus: a quo anno Biorni calculus propius abeſt, quam noſter. Non, quod iam tum Budinus aliquis, aut ille Othinus Priſcus fuerit, aut quod emigratum ſit in ſeptemtrionem, ſed quod in nomine Budinorum offendentes mythologi, porta eburnea inſomnium vigilantes admiſerint. Et ſunt in Herodoto alia, quae aucupati videntur fuiſſe. Credo ego, cum de Arimaſpis legiſſent, ex eo talem ſibi ſuum Othinum finxiſſe. Saxo Grammaticus: (4)

vulgo dicitur Othin
Armipotens, vno ſemper contentus ocello.

Edda Snorronis, mythologia decima quarta fabulatur, Othinum, cum e fonte Mimi ſapientiam bibere vellet, Mimero fontis domino oculum oppignoraſſe, vnde in vaticinio Volae: (5)

Omnino noui Odine, vbi oculum abdidiſti,
In recenti illo fonte Mimeri.

Saxo Grammaticus iterum ait: (6) *Odinum orbum oculo, hiſpido amiculo circumactum, bellorum vſum calluiſſe.* Totidem verbis ille Ariſteas Proconneſius de Arimaſpis:

Οφθαλμὸν δ' ἓν ἕκαςος ἔχῃ χαρίενλι μελώπῳ,
Χαίτῃσι λάσιοι, πάνλων ςιβαρώλαλοι ἀνδρῶν.

Oculum vnum habent in fronte,
Hirſuti capillos, omnium fortiſſimi hominum.

Deinde quae mythologi habent de *Sif* muliere, (quam propter vnius congruentiam ſyllabae, pro

(4) p. 32. (5) v. 31. (6) p.

reliqua facilitate ſua *Sibyllam* interpretantur) ea ſunt ex Herodoti illo loco ſurrepta, vbi de Hercule et virgine ſemidracone. Sed quid ceteris de Tyra fabulis atque iſti genealogiae Thracicae in prologo Eddae faciemus? Admiſcet Mythologus *nigri Memnonis arma*, tamquam ille Troam Priami filiam duxerit atque ex ea genuerit Tyren. Hoc eſt eiusmodi, vt illud alterum, Priamum fuiſſe Odinum et a Frigga coniuge eius Phrygiam regionem appellationem habuiſſe. Multa quidem in Aurorae filio Memnone Graeculi poſt *Homerum* ſibi permiſere, omnes tamen eum Aethiopibus et Indis praeficiunt, filiam autem Priami elocare eidem auſus eſt nemo. Conſtantinus Manaſſes, (7) vbi Παυτάνυν Indum Priamo ſubſidia miſiſſe per Memnona canit, de exercitu eius ita fatus eſt:

Οἱ δὲ ςρατὸς ἦσαν Ινδοὶ, πάντες μελανοχρῶτες.

Adeo, in quibus luſit Homerus, in iis poſteritas ſeriam conſectata hiſtoriam, noua quotidie excudit, quaſi ſubleuatura poetae fidem. Qui autem poterant auctori prologi, Priami iſta γενεαλογύμενα in mentem venire? Poteſt fieri, vt aliquid ex veteri fama de Thracibus Getarum populo cognatis viciniſque percrebuerit. In Faſtis Siculis ex Semironio Babylonio refertur, (8) quod poſt Ninum in Aſſyriis regnauerit Θύῤῥας ὀνόματι, ὅντινα μετωνόμασεν ὁ τύτυ πατὴρ Ζάμης τῆς Ῥέας ἀδελφὸς, Αρεα, ἐις ὄνομα τῦ πλάνητος ἀςέρος. *Thur-*

(7) p. 28 ed. Pariſ. (8) p. 88. ed. Raderi.

Thurras, cui ipſius Thurrae pater, Rheae frater, nomen Martis impoſuit, a planeta. Hunc deinde Thurrham ait, expeditione ſuſcepta verſus boream, Caucaſum quendam ex ſtirpe Iapeti bello aggreſſum, denique in Thracia obiiſſe. Eſt ſane illa tenuis memoria Tyrae Thracum parentis, de quo Samuel Bochartus in Phalego, quantum ſatis eſt, egit. Hic eſt *Thor* in mythologiis ſeptemtrionalibus, a quo videtur *Tyr* in Edda Snorronis (9) diſtingui, at in prologo confunduntur nomina. *Tyr* in ſeptentrionalibus linguis *magnum quemque virum* ſignificat, et in compoſitis augendi vim habet, vt Georgius Hickeſius animaduertit. (10) Credo eandem vim vocis apud Sarmatas obtinuiſſe. Nam Lucianus in Toxari teſtatur, ſi quis praelio ſuperatus ζίριν exclamarit, eius vitae Sarmatas pepercisſe, veluti ἐπὶ λύτρῳ ἥκοντος, hoc eſt, veluti qui diceret, vt ille in Rhapſodia Dolon:

Ζωγρεῖτ', αὐτὰρ ἐγὼν ἐμὲ λύσομαι.

Heſychius: τυρωθέντα, τὸν ταραχθέντα, κινηθέντα. Sed vtcumque inter Thracas vicinosque Getas et Scythas Sarmatasque celebre hoc Tyrae nomen fuerit, tamen ipſo in prologo Eddae nihil aliud, quam hoc nomen arreptum aliunde ſentio. Thraces vero, quos genealogiae Priami immiſceri videmus, non ſunt Europaei, ſed Aſiatici. Acceperat igitur mythologus, Thracas cum Rhaeſo ſuo Troianis

(9) Conf. in Edda mythol. 19. et 23. (10) In Theſauro linguarum ſeptemtrionalium T. I. in Grammatica Moeſo-Gothica p 102. It. p. 18. et Rudolphus Ionas in Lexico Islandico voce *Tyr*. Eddae mythologia 23.

nis rebus ab Homero adſpergi. Hi ſunt illi Thraces, quos Herodotus (1) cum Phrygia in Aſia poſuit. Euſtathius ad Dionyſium Periegeten (2) de his Thrcibus, καλέμεναι δέ πάλε Βρίγες, ἔιτα μεταβάντες ἐις Ασίαν μετέπεσον ἐις τὸ Φρύγων ὄνομα, *dicti Briges atque cum in Aſiam traieciſſent, mutato nomine Phryges.* Iſta migratio, ſi qua fuit, tam vetuſta eſt, quam Dardanus. Nam is, vt Euſtathius alio loco, (3) in cataclyſmo ex Samothracia nauigaſſe dicitur in Aſiam, ἐις τὺς Τρωϊκὺς τόπυς. Macedones item referebant Herodoto, (4) Briges finitimos Macedoniae agros tenuiſſe, transgreſſos in Aſiam dictos fuiſſe Phryges. Hos Thracas Xenophon quoque ab Cyri expeditione rediens reperit. Brigum autem nomen Heſychius nobis explicat ex Iuba: Βρίγα λέγεσθαι ἐλεύθερον, Lydia lingua: quod noſtrum videtur eſſe *Frey*, *fry*, *liber*, *ſui iuris*, eſt enim hoc ſimile iis vocibus quas Plato ex Phrygicis in Cratylo recenſuit, quasue nos etiam hodie in linguis noſtris agnoſcimus. Mythologus autem iſta quidem ignorauit: quae in mentem temere venerunt, ea ſic poſuit, vt hiſtoria eius Horatianae tabula eſſet

> *Perſimilis, cuius, velut aegri ſomnia, vanae*
> *Finguntur ſpecies, vt nec pes, nec caput vni*
> *Reddatur formae.*

Sed ſunt ex Graecis, qui in Homero Thracas Europaeos interpretentur: quare minora ſcholia (5) non

(1) l. III. 90. (2) ad v. 323. (3) ad v. 524. (4) l. VII. 73. (5) Il. K. v. 435.

non patiuntur Rheſum Eiones eſſe filium, vt Homerus cecinerat, ſed Strymonis edunt fuiſſe: nam is fluuius in Thracia Europaea erat. Deinde alii Thracas ab Ilio duxerunt in Europam, eo maxime argumento, quod hic quoque reperiebant Dardanos. Appianus in Illyricis Graecis Hoeſchelianis: (6) ὑλώδης δ' ἔϛιν ἡ Παιόνων, καὶ ἐπιμήκης ἐξ Ιαπόδων ἐπὶ Δαρδάνυς, *vliginoſa eſt Paeonum regio et a Iapodibus ad Dardanos protenta.* Paeones autem ipſi de Iliacis originibus gloriabantur. (7) Itaque fieri poteſt, vt in vetuſta Othini fama de Thracibus Europaeis aliqua memoria conſeruata fuerit, quae deinde ex Homericis fabulis aliisque Graeculorum figmentis ſit foedata. Nam ipſum Getarum nomen ad extremum in Othini fabula reperimus, vbi de morte eius Snorro: (8) *morti vicinus perhibuit, Godheim ſibi petendum eſſe, vt amicos ſuos ibi exhilarare poſſet. Godheim* Peringskiöldus *deorum ſedes* reddit, inuito vtique Snorrone, qui paullo ante dixerat: hanc *Svithiod* (Sueciam) *vocarunt Mannheima, ſed alteram Miklo Svithiod* (magnam Suetiam, ſiue Scythiam) *appellarunt Godheima: de hoc Godheim multa exſtant memoriae prodita.*

Poſtquam Othinum ab Iſtro et Boryſthene deduximus, non opus eſt, vt totum illius iter in Saxoniam, Daniam, Suediam ex Snorrone perſequa-

(6) p. 11. Imperite vetus interpres, vt ſolet: "Paeones natio ingens circa Iſtrum per longum incolens, ab Iapodum populis ſupra Dardanos protenditur" (7) Herodotus l. V. c. 13. (8) p. 11."

ſequamur. Nam ſatis nunc eſt, quod memoriam conuerſionum iis in regionibus, quas tractandas ſuscepi, recoluimus. Ceterum non displicet mihi Olai Verelii ſententia, cum de Othino ſic ait: (9) *Fuit hic Ouinus per orbem arctoum longe celeberrimus, non tam illuſtribus facinoribus, quam praeſtigiis et artibus magicis.*

(9) In indice ad *Herrauds Saga* voce *Sonar Odins*.

Con-

Coniectura de nomine Balthici maris.

MAtthaeus Praetorius in orbe Gothico Balthicum mare ab *albis litoribus* dictum cenſuit. Pruteni enim litorales, quoad linguae Pruſſicae, quae nunc plane eſt exſtincta, vſus obtinuit, *Baltikkei* appellati ſunt, id eſt, *albae terrae incolae*, a *baltikkas*, quod *album* ſignificabat. Eſt autem hoc vocabulum etiam Litthuanicum. *Baltas*, *baltinu*, *dealbare*, *balkſtu*, *ſubcandidum eſſe*, *baltis* et *balties*, *ceruſſa*, *baltis*, *baltimas*, *albugo*, *baltulis* et *baltinelis*, *candidum*. Vendice *bidla*, Eſthonice, *walge*, Fennice, *walckia*, Ruſſice, *bielo*. Quemadmodum litorales Pruſſi lingua ſua *Baltikkei* dicti fuerunt, ita inuenio, Ordinis Teutonici Equites litus iſthuc, in quod ſuccina eiiciuntur, *Wittland*, id eſt, *albam terram* appellaſſe. Vidi duo diplomata Hannonis Sangeruſani, ex quibus hoc didici. Vnum hic apponam:

Frater Anno Hoſpitalis S. Mariae Theut. Hieroſolym. Magiſter vniuerſis praeſens ſcriptum viſuris ſalutem in Domino ſempiternam. Recognoſcimus et tenore praeſentium proteſtamur, quod, cum nos et Fratres noſtri, quandam munitionem, vt ſecurus pateat introitus et exitus nauibus ad terras Pruſſiae applicantibus, in loco, qui Wittlandes-ort vulgariter appellatur, conſtruere intendimus: qui ſiquidem locus, pro tertia parte Venerabilem Dominum Epiſcopum Sambienſem et pro duabus partibus nos contigit, idem Epiſcopus, vt dicta munitio

a nobis

a nobis ac noſtris Fratribus in Chriſtianitatis ſubſidium conſtruenda felicem ac proſperum aſſequeretur effectum, eam dicti loci partem, qui ipſum in longitudinem et latitudinem vsque ad nemus adiacens contingit, nobis Fratribus ac Ordini noſtro cum vtilitate, iurisdictione et iure in veram proprietatem contulit ac donauit perpetuo libere poſſidendam. Nos vero de Fratrum noſtrorum conſilio dicti Epiſcopi grato occurrentes aſſenſui, tres manſos et praeterea tantum terrae ſpatium in longitudine et latitudine, quantum nobis, Fratribus noſtris ac Ordini, dicto loco, ſcilicet Witteslandes-ort, vt praemiſſum eſt, contulit ac donauit, praefato Epiſcopo ſuisque ſucceſſoribus cum omni vtilitate, iuri dictione et iure in veram proprietatem pro reſtauro conferimus et donamus in eo loco, quo dictus Epiſcopus Cathedralem ſuam ſedem decreuit collocare. Praeterea boc adicimus (adiicimus) *ſupra dictis, quod, ſi in dicto loco, videlicet Wittlandes-ort contigerit inueniri lapides, qui Burnſtein* (ſuccinum) *vulgariter appellantur, dictorum lapidum duae partes nobis ac Fratribus noſtris et pars tertia cedet Epiſcopo memorato. Et ſi neceſſe fuerit expenſas baberi in collectione ſeu conquiſitione lapidum praedictorum, nos et Fratres noſtri ipſas pro duabus partibus faciemus et ſaepedictus Epiſcopus pro tertia parte ſua, tertiam partem faciet et per ſacrum. In buius itaque rei teſtimonium, ſigillum noſtrum eſt appenſum. Datum anno Domini 1264. menſe Iulii.*

NV-

NVMVS AEGIENSIS
ILLVSTRATVS.
T. S. B.

Tabula XII. Fig. 2.

C*Aput barbatum et laureatum* ΑΙΓΕΩ: - - = *Signum decuſſatum in ſpeciem Graecae litterae* X, *cuius ima crura* Α *deſcribunt, appoſitis litteris, in ſummo* ΑΡΙ, *in medio* ΤΟΔ, *in imo* ΜΟC, *quas laurea complectitur. Numus in muſeo Imperatoriae Academiae Petropolitanae.*

I. Exſtant numi ΑΙΓΙΕΩΝ. ΑΙΓΕΙΩΝ. ΑΙΓΑΙΩΝ. ΑΙΓΕΑΙΩΝ. ΑΙΓΑΕΩΝ nominibus inſcripti, in quibus doctiſſimi antiquarii haeſitarunt, cui vnumquemque numum vrbi, cui populo vnumquodque ἐθνικὸν attribuerent. Hic numus Aegienſium in Achaia eſt. Id me optimo iure cenſere, αὐτὸ τοῦτο, τὸ ἐθνικὸν demonſtrat. Stephanus Byzantius enim, poſtquam ex Eudoxo Achaiae vrbem Aegium eſſe docuit, ὁ πολίτης, inquit, Αἰγιεὺς, et auctoritatem oraculi adfert, quod quia Euſtathius (1) altero verſu plenius protulit, ex hoc malumus citare quam e Stephano:

Ὑμεῖς δ᾽ Αἰγιέες οὔτε τρίτοι, οὔτε τέταρτοι,
Οὐδὲ δυωδέκατοι, οὔτ᾽ ἐν λόγῳ, οὔτ᾽ ἐν ἀριθμῷ.

Neque aliter Polybius, Pauſanias, Strabo. *Aegienſes* T. Liuio dicuntur. Et eſſe hunc numum Achai-

(1) Il B. p. 292. ed. Rom.

cum, praeterea, ſignum decuſſatum confirmat, quod nihil aliud ſignificat, quam Achaiam. Bernhardus Montefalco quidem (2) iſthuc ſignum ΑΙΓΙΕΙΩΝ monogramma eſſe cenſet, nihil vero optimi ſenis iudicio atque doctrinae detractum velim, ſi hic eum ſequi non auſim. Nam Aegienſium nomen Graece non effertur Αιγιείων, neque magis quidquam in oculos incurrit, quam ſignum iſthuc ex Α et Χ eſſe conflatum. Videtur autem Montefalco in circulum legiſſe, vt, ſi ab Α pergas ſiniſtrorſum, putes habere te in *ſuperiori cru*re Ι. cui proximum ſit Γ, tum redire ordinem ad Α: et in ſuperiori Ι deſinere, vt ſint ΑΙΓΑΙ. Sed Aegae in Cilicia, Macedonia, in peninſula Thracaeſiorum, Myrrhina, Aeolide, Lydia, Locride, Aetolia, Euboea (tam multae enim *eodem* nomine fuere Aegae) gentile omnes habuere teſte Stephano, Αιγαίων aut Αιγεάτων. Aegae vero in Achaia, tum quidem, cum hic numus eſt ſignatus, fuere nullae, agro Aegaeo multis ante temporibus attributo Aegienſibus. (3) Exſtant denique numi apud Golzium et Begerum his cum monogrammatis:



in quibus nemo, ne haeſitauerit quidem, ΑΧΑΙΩΝ eſſe legendum. Eſt etiam numus in gaza Regis Pruſſiae

(2) In Palaeogr. Graeca p. 143. (3) Strabo ed. H. Petri p. 441.

Pruſſiae, in quo Aegienſes ſignum illud Achaiae tetragono incluſerunt. Eo in ſigno A rudius ad Phoeniciae formam litterae factum, vt hic in numo ipſo cernitis, quem primus protulit Laurentius Begerus, (4) et ex Begero Bernardus Montefalco in Antiquitatibus explicatis. (5) Alios duos numos Nicolaus Haymus (6) edidit. Vterque habet caput Iouis: vnus praeterea circa Achaiae monoſyllabum, Corinthi nomen, alter obſcuriores litteras, in quibus Tyri monogramma mihi ſuſpicionem mouit, vt poſtea quoque dicam, de Tyro oppido in Argolica regione, haud longe ab Inacho fluuio. Scilicet ex quo tempore vrbes in Peloponneſo pleraeque ad vnum corpus et concilium Achaicum aggregatae fuerunt, ius monetae cudendae ſingularum vrbium fuit: numi autem erant communes Achaeorum omnium, quacunque in vrbe eſſent ſignati. Inde commune populi Achaici monogramma impreſſum fuit, nonnumquam appoſito nomine vrbis eius, in qua cuſi ſunt, haud raro etiam praetermiſſo. Sic Polybius tradit, Achaeos amicitiam ſociali foedere iniuiſſe, ϗ νόμοις χρῆσθαι τοῖς ἀυτοῖς ϗ σταθμοῖς ϗ μέτροις ϗ νομίσμασιν, *vt legibus, ponderibus, menſuris iisdem, pecunia denique communi vterentur omnes.* Hoc enim aliis in vrbibus Graeciae minime obtinebat, vt vna in vrbe ſignati numi, alterius populi in vrbibus reciperentur. Teſtem habeo Galenum in protreprico,

Fig. 2.

Fig. 3. 4.

(4) T I. p. 447. (5) T. III. parte I. tab. 89. (6) In theſauro Britannico T. II. p. 96.

ptico, (7) τὰ κατὰ πόλιν νομίσματα παρὰ τοῖς θεμένοις ἰσχύοντα, παρ' ἄλλοις ἐςὶ κίβδηλα, *numi ſingulis in ciuitatibus cuſi, apud eos vtique pretium habent, a quibus ſignati ſunt, at aliis in ciuitatibus non recipiuntur.* Quam ob cauſſam Ariſtoteles in Nicomachiis (8) νόμισμα παρὰ τὸν νόμον dictum afferit, quod οἷον ὑπάλλαγμα τῆς χρείας γέγονε κατὰ συνθήκην, καὶ ἄτι οὐ φύσει, ἀλλὰ νόμῳ ἐςὶ καὶ ἐφ' ἡμῖν, μεταβάλλειν καὶ ποιῆσαι ἄχρηςον. Hoc enim non tantum eo pertinet, quod in Oeconomicis tradit, (9) Hippiam tyrannum Athenis omnem numum ἀδόκιμον eſſe iuſſiſſe, atque eodem ex argento eudendos nouo ſigno elocaſſe alios: verum etiam ad ſingularum leges vrbium reſpexit, per quas ſuum cuique numo pretium fuit.

In aduerſa numi parte caput Iouis eſt laureatum, ſiue is ſit ΖΕΥΣ ΣΩΤΗΡ, cuius ſimulacrum Aegii in foro dedicatum fuit, (10) ſiue ΖΕΥΣ ΟΜΑΓΥΡΙΟΣ, cuius delubrum in maritima vrbis regione exſtitit. (1) Homagyrius, (tam) quam *congregatorem populi in vnum concilium* dicas, in eius conuentus honorem poſitus videtur, qui a Panachaeis Aegii eſt habitus. Quamquam Pauſanias id nomen eo interpretatur, quod Agamemnon hoc loco principes Graeciae de ſumma belli Troiani in conſilium adhibuerit, tamen id veluti vanum et futile nemo morabitur. Fuit et Iupiter

(7) p. 7. ed. Pariſ. (8) l. V. c. 8. (9) l. II. c. II. (10) Pauſanias p. 573. (1) ib. p. 584.

ter Infans patria Aegienſium religione cultus, cuius ſimulacrum aeneum ab Agelada Argiuo fabrefactum, quotquot annis ſacerdos lectus in aedibus ſuis adſeruabat. Huic Ioui priſcis temporibus ſacerdos venuſtate inter ceteros eximia legebatur puer, eoque pubeſcente alius. (2) Tenuit religio Iouis Aegienſis ea maxime cauſſa, quod ad vrbem hanc Iouem a capra nutritum ferebant, (3) vnde et Aenarium, haud procul ab Aegio, lucus Achaeorum comitiis frequentatus, Ioui ſacer erat, teſte Strabone. Ea cauſſa etiam Iunonis vultum Aegienſes ſignarunt in numo Golziano. In eiusdem numi auerſa Lucina eſt ſic, vt ſignum deae Aegienſis Pauſanias deſcripſit. (4) Damophon Meſſenius fecerat, os, manus et pedes e marmore Pentelico, reliquum corpus e ligno: a vertice ad calcem tenuis carbaſus ſimulacrum tegebat, ϗ ταῖς χερσὶ, inquit Pauſanias, τῇ μὲν ἐς εὐθὺ ἐκτέταται, τῇ δὲ ἀνέχει δᾷδα. Id ἐς εὐθὺ τέταται, quemadmodum intelligendum ſit, figura in numo declarat. Quem vero Iouem hoc in numo Aegienſi poſitum dicemus? Nempe Homagyrium potius, quam Sotera. Non enim tantummodo in Aegienſium, verum etiam in aliarum quoque numis vrbium, qui Achaici nominis eſſent et corporis, Iupiter ſpectatur, vt non peculiariter Aegii cultum Sotera, ſed Panachaeorum tutelam Homagyrium ſignari manifeſtum ſit. Et mos erat, vt praetores Achaei primo comitiorum die ominis Tab. XII. Fig. 6.

 cauſ-

(2) Pauſanias p. 584. (3) Strabo p. 441. (4) p. 582.

cauſſa pronunciarent Iouem, Apollinem, Herculem. (5) Crotoniatis, Sybaritis et Coloniatis in Magna Graecia, ΖΕΥΣ ΟΜΟΡΙΟΣ cultus eſt, teſte Polybio. (6) In quo paene inclinat animus, vt e Pauſania reponere malim ΟΜΑΓΥΡΙΟΝ. Nam vt Sybaritae ceteraeque vrbes hoc nomine dedicarent Iouem, ad cuius delubrum conuentus agerent et commune ciuitatum concilium, Achaeorum imitatione inſtitutum eſt. Miſerunt enim legatos in Achaiam, qui mores legesque Achaeorum addiſcerent, ſecundum quas ſimilem *ſuis* in vrbibus rem publicam conderent. (7)

Laurentius Begerus in numo Aegienſi (8) vultum Neptuni, non, vt nos, Iouis, explicat. *Haud procul ab Helice*, inquit, *Neptunus Heliconius colebatur: huic Iones in Panioniis ſacra fecerunt: ita veroſimile fit, Achaeos pulſis Ionibus, eiusdem religione numinis fuiſſe tactos. Fama tenet, Ionas ab Achaeis repetiiſſe ſimulacrum dei ac formam illius, Achaeos noluiſſe concedere, qua fine alia, quam quod illud numen ab ſe ſolis coli vellent? Patrae vrbs in Achaia et ea in vrbe Neptunus quoque cultus.* In eam ſententiam praeſtantiſſimus vir iudicauit. Mouit autem eum res perexigua vt ita ſtatueret, quod in auerſa numorum quorundam Achaicorum tridens Neptuni viſitur. Sed quid auerſae illa nota ad caput laureatum? quid Neptuno cum laurea? Deni-

(5) Liuius l. XXXII. c. 25. (6) p. 176. (7) Polybius l. c. (8) Theſauri Brand. T. I. f. 445.

uique aliis in nummis auerſa habet fulmen Iouis et clauam Herculis, numquid et illa ad Neptunum iure meritoque referemus? Quod Begerus vrget amplius, ante Helicen euerſam, Achaeos aeque, vt antea Ionas, concilium Aegii celebraſſe atque adeo ſua ſacra Neptuno Heliconio feciſſe, id nos nihil mouet. Nam cum Aegienſium in luco Ioui ſacro conuenere Achaei, non potuere, quin Ioui illius praeſidi luci facerent. Ea conſuetudo tenebat in Graecia, vt quo in loco conuentus inſtituerentur populi, illic ſacra inſtaurarentur illi deo deaeue, cuius numini is ipſe locus ſacer erat: Amphyctiones Delphis faciebant Apollini, Panionium Epheſi Dianae. Praeterea Helicae et ad Neptuni Heliconii, conuentum Panachaeorum indictum reperio fuiſſe nullum, immo ne Aegii quidem fuiſſe, niſi aliquanto tempore poſt Helicem euerſam. (9) Iones autem ab Achaeis victi, e fuga ſeſe receperunt Helicen: inde etiam e pacis foedere, Ionibus dimiſſis, Achaei ſine populi concilio fuere ſub regibus: vbi liberi corporis coeperunt eſſe, quod Strabo teſtatur, (10) in Aenario luco, is Aegienſi in agro erat, conuentum eſt. Neptuni autem Heliconii adeo nulla Achaeos religio mouit, vt repoſcentibus Ionibus illius ſimulacrum dei formamque templi, Helicenſibus auctores eſſent Achaei, vti redderent. Teſtis Strabo. (1) Helicenſibus nihilo magis ad reddendum permotis, inſecuta eſt et Helices et fani Helico-

(9) Pauſanias p. 538. (10) p. 441. (1) p. 439.

nii clades à terrae motu et fluctibus maris. (2) Achaei hoc in religionem vertentes, Ionibus ſua ſibi ſacra habere iuſſerunt. Quamuis igitur poſt iſtam cladem ager omnis Helicenſis Aegienſibus eſſet attributus, (3) tamen ad fanum Neptuni Heliconii non Achaei, ſed Iones ſacra fecere, ad Strabonis vsque aetatem. Clades Heliconia, eiusdem teſtimonio Strabonis, duobus ante Leuctricam pugnam annis contigit. Pugnatum eſt, Olympiadis CII. anno tertio ineunte: terrae motu igitur concuſſa eſt Helice Olympiadis CI. anno *quarto. Eum* annum Pauſanias (4) diſertis verbis edidit, vt Euſebium non moremur, qui ad Olympiadem C. refert. Et Ariſtoteles vero in meteorologicis tradit (*) Achaicum illum terrae marisque motum eodem tempore, quo magnus cometa apparuit, hieme videlicet, Αριςάιȣ ἄρχοντος. Locum corruptum Seldenus iam emendauit, vt eſſet Αςέιȣ. In marmoreo chronico ΑΡΧΟΝΤΟΣ ΑΘΗΝΗΣΙΝ ΑΣΤΕΟΥ ΚΑΤΕΚΑΗ ΔΕ ΤΟΤΕ ϗ ȣ̓ρανὸς, vt ſuppleuit Seldenus, ſeu potius vt Palmerius: ϗ πυρωνὴ δοκὶς ἐν ȣ̓ρανῷ. Aſteus archon fuit Olymp. CI. 4. Ab eo tempore Aegium praecipua dignitate vrbs fuit, vt habet Pauſanias eo in loco, (5) quem cum Begerus non accurate inſpexiſſet, Helicae putauit conuentus Achaeorum ante hanc cladem fuiſſe ſolitos celebrari, quod Romuli Amaſaei quidem ſermo indicat, nequaquam vero ipſe Pauſanias: itaque

(2) Strabo l. c. Pauſanias p. 583. (3) Pauſanias p. 589. (4) l. c. (*) L. I. 6. (5) p. 538.

que mea iſthaec eſt ſententia, in aduerſa numi noſtri ceterorumque Achaicorum Iouem Homagyrium conſpici, in auerſa praeter monogramma Achaicum, eius ſymbolum dei exſtare, cui deo vrbs quaelibet, in qua numus eſt cuſus, peculiari religione deuota fuit. Aegienſes autem praeter Iouem publice coluerunt Neptunum et Herculem, teſte Pauſania: aliae vrbes deos deasue alios. Ita aut tridentem Neptuni ſignarunt in auerſa, aut fulmen Iouis, aut cytharam Apollinis, aut caput Mineruae, aut clauam Herculis. Retineo me, ne, dum vt ſatisfaciam lectoribus, quaero, per omnes Achaicos numos vagando nimium ab inſtituto deflectam.

Quas ego vero dicam in auerſa exſtare litteras? Ludouicus Nonnius cum in numis Achaicis Goltii, Myrtilum, Callimachum, Pandiona, Thelamonem, videret, *nomina*, inquit, *forte ſunt praetorum et damiurgorum.* (6) ΑΡΙϹΤΟΔΑΜΟϹ, vt ego lego in hoc numo, eſt nomen magiſtratus Aegienſis. Nomen in Peloponneſo frequens. Ariſtodemum habemus ex Herculis poſteris, a quo duae regiae domus apud Spartanos: Ariſtodemum alium Spartanorum regis neceſſarium, tutorem eius liberis datum: Ariſtodemum tyrannum Megalopoli, quo expulſo, concilio Achaeorum adſcripti ſunt Megalopolitani: Ariſtodamum, qui cum Callicrate, Ageſia et Philippo legatus, ab Achaeis in caſtra venit

(6) p. 41.

ad L. Aemilium Paullum, ob victoriam de Perſe rege gratulatum. Et quorſum omnes Ariſtodemos hic annumerem? Quem autem magiſtratum geſſiſſe Ariſtodemum? quo tempore ſignatum hunc numum eſſe exiſtimem? Indicium aliquod temporis extrema littera facit, quae vt ab Ioanne Harduino et Bernardo Montefalcone annotatum eſt, ſub Caeſare Auguſto in lunulam mutari coepit, cum antea, vt eſt in gripho Euripidis, βόστρυχός τις et in aenigmate Agathonis tragoedi, arcui Scythico ſimilis videretur. Cleomedes ἐν Κυκλικῇ θεωρίᾳ (7) lunam cornutam σιγμοειδέα τῷ σχήματι dixit: at is Auguſtei ſcriptor ſeculi eſt. Ante Hadrianum Imperatorem figura iſta τῶν σίγμα vetus in marmoribus et numis adhiberi prorſus deſiit. Quoad autem Auguſtus rebus Romanis praefuit, Achaia in prouinciis cenſita eſt, in quas rectores a Senatu, non a Caeſare ſunt miſſi. Nerone Claudio Druſo Caeſare, C. Norbano Coſſ. A. Dionyſiano 15. *Achaiam et Macedoniam onera deprecantes leuari in praeſens proconſulari imperio tradique Caeſari placuit*, vt auctor eſt Tacitus: (3) ex quo tempore prouinciae Moeſiae, quae iam antea Caeſaris Auguſti et Tiberii Caeſaris in poteſtate fuerat, adiecta. Cur graue Achaeis proconſulare imperium fuerit, multis diſputat ad hunc locum Ioannes Frederi-

cus

(7) p. 75. (8) Anal. l. I. c 76. 80.

I



fig: II



III.

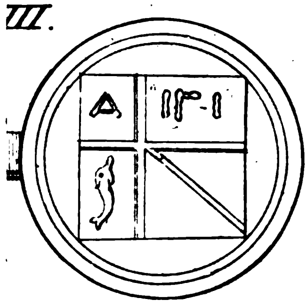


fig: IV





fig: VI.

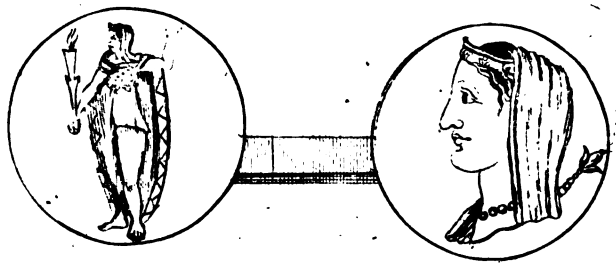


fig: VII.



cus Gronouius. Sed mihi numi Achaici omnes libera populi Achaici republica cuſi videntur. Ariſtodamus autem non fuit aliquis praetorum Achaicorum, ſed Aegienſis magiſtratus. Ioannes Harduinus in numis vrbium hunc ipſum numum produxit iis verbis: ΑΙΓΙΕΩΝ *ex parte auerſa nomen Archontis* ΑΡΙΣΤΟΔΑΜΟΣ. Α. *hoc eſt*, Αρχων, *vel Praetor fuit. Apud illuſtrem Harlaeum et in muſeo noſtro.* Quamquam Harduinus duos numos vidit, tamen vereor, ne A. iſthuc tantummodo in monogrammate Achaiae ſibi deprehendiſſe ſit viſus: nam quod τὸ σίγμα aliter, quam in noſtro eſt, exprimit, hoc vero ſuspicionem mihi mouet, aliquid humani clariſſimo antiquario accidiſſe. Si in eo non eſt erratum, tamen archontem incommode praetorem exponit. Nam praetores vt dicerent Romani τὺς ςρατηγὺς Graecorum, conſuetudo perpetua obtinuit: apud Achaeos autem ςρατηγὸν quotannis vnum, ἄρχοντας vero ciuitatium rectores fuiſſe complures, infra declarabo ex inſtituto. Eundem in modum Cimon et Methrodorus Manecadis filius in numis Golzianis Patreenſium archontes fuerunt, Dymaeorum vero Myrtilus, Phliuntiorum Callimachus, in numis item Golzianis. Vt plane intelligatur, quos Dymaeis et Phliuntiis adſcribam, cum nihil apparuerit doctiſſimis ante nos antiquariis, cur numos iſtos Achaicos his potiſſimum vrbibus adſignarent, digrediar equidem non inuitus ab Aegio atque in Achaia per ceteras vrbes vagabor. Tab. XII. 7. Tab. XIII. 8. 9. 10.

Ita igitur ſentio, numos Achaicos, eius vrbis, a qua ſignati fuere, nomen, aut litteris referre, aut quodam monogrammate. Apponam tum litteras, tum monogrammata mea cum interpretatione.

ϘOP Κορινθίων ſine dubio. Eſt enim illa littera, vetus a Phoeniciis acceptum κόππα, diuerſum a κάππα, vt vel ex Euſtathio iam abunde notum.

Δ Δυμαίων.

A Αργείων.

M Μεγαλοπολιτῶν, ſiue Μεσσηνίων. Vbi in mentem venit, quod Euſtathius ad Iliadem ſcriptum reliquit: (9) Lacedaemonios ſcutis ſigni in locum inſcripſiſſe Λ litteram, λαμβδα, ἐκ τοῦ καλάρχοντος ςοιχείου χαρακτηρίζοντας, ita vt Meſſenios τὸ M. Adfert autem eam in rem ex Eupoli, ἐξεπλάγην γὰρ, ἰδὼν ςίλβον τὸ λάμβδα, hoc eſt, *ſcutum Laconici militis*.

K Κλεωναίων.

Φ Φλιουντίων aut Φενεάτων.

N Ναυπλιέων.

MΥϘ Μυκηναίων, compoſitum monogramma tribus ex litteris, M et Υ et Ϙ veteri.

FA Φαραίων ſeu Φηραίων, vrbs enim eſt in Achaia Φάραι. Sic, inquam, vt in numis FAΛEI-ΩN

(9) f. 293, ed. Rom.

ΩΝ et FΑΣΤΙΩΝ, de quibus Ezechiel Spanhemius.

I In numis Begerianis, quod nomen vrbis ſit, non recordor. Puto virum doctiſſimum I legiſſe in numis, in quibus P fuit ſcriptum. Scitis enim, quam tenui capite iſthuc P in numis ſcribatur, vt videri poſſit nullum exſtare caput et plane ipſum I eſſe. Tum vero Píυ numus fuerit, vrbis non ita celebris quidem, at in qua tamen Liuius concilium Achaicum aliquando conueniſſe teſtatur.

 Τυρίυ oppidi in Argolide.

Iam primus ex Haymo numus, quem ſupra produxi, a Corinthiis, Nauplienſibus et Megalopolitanis, alter ex eodem Haymo a Pharaeis, Mycenaeis, Tyriis eſt cuſus. Vndecimus e gaza Regis Pruſſiae a Dymaeis et Rhio oppido, duodecimus ab Argiuis Nauplienſibus, Pharaeis, tertius et decimus a Dymaeis, Megalopolitanis aut Meſſeniis, Rhioque vrbe, quartus et decimus a Cleonaeis, Dymaeis, Megalopolitanis, quintus et decimus a Cleonaeis, Argiuis, Megalopolitanis, ſextus et decimus a Nauplienſibus Phliuntiis ſiue Pheneatis et Meſſeniis ſeu Megalopolitanis. Omnes e numophylacio Pruſſico. Itaque videtis, cur Myrtilum Dymaeis, Phliuntiis Callimachum archontem dederim. Quintus et decimus in his numis habet praeterea epocham Achaicam ZB adſcriptam. Annus Achaicus LXII. eſt, cum praeturam geſſit Eperatus. Haec epocha quae ſit, e faſtis Achaicis intelligetur.

Tabula XIII. Fig. 11. 12. 13. 14. 15. 16.

FASTI ACHAICI.

T. S. B.

A.P.I.	A.V.C.	Coſſ.	Olymp.	A.Achaic	Praet.
4431	471	P. Cornelius Dolabella	CXXIV.		*His XXV. annis unus Γραμματεὺς ſeu Scriba et Στρατηγοί*
		Cn. Domitius Caluinus	1/2		
4432	472	C. Fabricius Luſcinus			
		Q. Aemilius Pappus	2/3		
4433	473	L. Aemilius Barbula			
		Q. Marcius Philippus	3/4		
4434	474	P. Valerius Laeuinus	CXXV.	1	
		T. Coruncanius Nepos	4/1		
4435	475	P. Sulpicius Sauerio	1/2	2	
		P. Decius Mus			
4436	476	C. Fabricius Luſcinus II.	2/3	3	
		Q. Aemilius Pappus II.			
4437	477	P. Cornelius Rufinus II.	3/4	4	
		C. Iunius Brutus II.			
4438	478	Q. Fabius Gurges II.	CXXVI.	5	
		C. Genucius Clepſina	4/1		
4439	479	M. Curius Dentatus III.		6	
		L. Cornelius Lentulus	1/2		
4440	480	Ser. Cornelius Merenda		7	
		M'. Curius Dentatus	2/3		
4441	481	C. Fabricius Luſcinus IV.		8	
		C. Claudius Canina	3/4		
4442	482	L. Papirius Curſor II.	CXXVII.	9	
		Sp. Caruilius Maximus II.	4/1		
4443	483	C. Quinctius Gulo Claudus		10	
		L. Genucius Clepſina	1/2		
4444	484	C. Genucius Clepſina II.		11	
		Cn. Cornelius Blaſio	2/3		
4445	485	C. Fabius Maximus Pictor		12	
		Q. Ogulnius Gallus	3/4		

Sub verem huius anni Pyrrhus rex *in Italiam traiecit.* Vide infra Faſtos illuſtratos. c. I. 6.

Dymaei, Patrenſes, Tritaeenſes, Pharaeenſes Achaicam rempublicam eodem vere condunt. I. 6. 7.

A.P.I.	A.V.C.	Coſſ.	Olymp.	A. Achaic.	Praet.	
4446	486	P. Sempronius Sophus App. Claudius Craſſus	CXXVIII. 4/1	13	*ſeu Praetores duo, quotannis lecti, rebus praefuerunt.*	
4447	487	A. Atilius Regulus L. Iunius Libo	1/2	14		
4448	488	T. Iunius Pera N. Fabius Pictor	2/3	15		
4449	489	Q. Fabius Maximus Gurges III. L. Mamilius Vitulus	3/4	16		
4450	490	App Claudius Caudex M. Fuluius Flaccus	CXXIX. 4/1	17		
4451	491	M'. Valerius Maximus M'. Ottacilius Craſſus	1/2	18		
4452	492	L. Poſtumius Megillus Q. Mamilius Vitulus	2/3	19		
4453	493	L. Valerius Flaccus T. Otacilius Craſſus	3/4	20		
4454	494	Cn. Cornelius Scipio Aſina C. Duilius Nepos	CXXX. 4/1	21		
4455	495	C. Aquilius Florus L Cornelius Scipio	1/2	22		
4456	496	A. Atilius Calatinus P. Sulpicius Paterculus	2/3	23		
4457	497	Cn. Cornelius Blaſio C. Atilius Regulus	3/4	24		
4458	498	M. Atilius Regulus II. L. Manlius Vulſo Longus	CXXXI. 1 / 4	25		
4459	499	M. Aemilius Paulius Ser. Fuluius Nobilior	1/2	26	1	MARCVS Carynenſis vnus vnius anni praetor. I 7.
4460	500	Cn. Cornelius Aſina II. A. Atilius Calatinus II.	2/3	27	2	His annis e Dymaeorum, Tritaeenſium et aliarum vrbium ciuicus praetores lecti. c. II. 1.
4461	501	Cn. Seruilius Caepio C. Sempronius Blaeſus	3/4	28	3	
4462	502	C. Aurelius Cotta P. Seruilius Geminus	CXXXII. 1 / 4	29	4	
4463	503	L. Caecilius Metellus C. Furius Pacilius	1/2	30	5	MARCVS Carynenſis II. r. Sicyonii, pulſo Cal. Iuniis Nicocle tyranno, accedunt corpori Achaico. II. 1. Aegienſes, Burii, Carynenſes accedunt corpori Achaico. I. 8. II. 1.

4464

A.P.I.	A.V.C.	Coſſ.	Olymp.	A.Achaic.	Praet.	
4464	504	C. Atilius Regulus II L. Manlius Vulſo	$\frac{2}{3}$	31	6	
4465	505	P. Claudius Pulcher L. Iunius Pullus	$\frac{3}{4}$	32	7	
4466	506	P. Seruilius Geminus II C Aurelius Cotta II.	CXXXIII. $\frac{4}{1}$	33	8	
4467	507	L. Caecilius Metellus II. M. Fabius Buteo	$\frac{1}{2}$	34	9	
4468	508	M. Fabius Licinus M'. Otacilius Craſſus II.	$\frac{2}{3}$	35	10	
4469	509	M. Fabius Buteo II. C. Atilius Balbus	$\frac{3}{4}$	36	11	ARATVS Sicyonius I. c. II. 3.
4470	510	A Manlius Torquatus C. Sempronius Blaeſus II.	CXXXIV. $\frac{4}{1}$	37	12	
4471	511	C. Fundanius Fundulus C. Sulpicius Gallus	$\frac{1}{2}$	38	13	ARATVS *II. c. II.* 2. Corinthii, Epidaurii, Troezenii, Megarenſes, acceſſere Achaeis. c. II. 2.
4472	512	C. Lutatius Catulus A. Poſtumius Albinus	$\frac{2}{3}$	39	14	ARATVS III c. I. c. II. 7. Cleonis Nemea celebrat praetor c. II. 7.
4473	513	Q. Lutatius Catulus Cerco A. Manlius Torquatus II.	$\frac{3}{4}$	40	15	
4474	514	C. Claudius Cento M. Sempronius Tuditanus	CXXXV. $\frac{4}{1}$	41	16	ARATVS IV Bellum Aetolicum c. II 7. 8.
4475	515	C. Mamilius Turrinus Q. Valerius Flaccus	$\frac{1}{2}$	42	17	ARATVS V. c. II. 7. 8.
4476	516	Ti. Sempronius Gracchus P. Valerius Falto	$\frac{2}{3}$	43	18	ARATVS VI. c. II. 7. 8.
4477	517	L. Cornelius Lentulus Q. Fuluius Flaccus	$\frac{3}{4}$	44	19	ARATVS VII. c. II. 8. Ariſtippus tyrannus oppreſſus c. II. 8.
4478	518	C. Licinius Varus P. Cornelius Lentulus	CXXXVI. $\frac{4}{1}$	45	20	DIOETAS c. II. 8. Megalopolis Achaeis tradita a Lyſiade tyranno c II 7.
4479	519	C. Atilius Balbus II. T. Manlius Torquatus	$\frac{1}{2}$	46	21	ARATVS VIII. c. II. 6.
4480	520	L. Poſtumius Albinus Sp. Caruilius Maximus	$\frac{2}{3}$	47.	22	LYSIADES Megalopolitanus I. c. II. 6.
4481	521	Q. Fabius Maximus M'. Pomponius Matho	$\frac{3}{4}$	48	23	ARATVS IX. c. II. 6.
4482	522	M. Aemilius Lepidus M. Poblicius Malleolus	CXXXVII $\frac{4}{1}$	49	24	LYSIADES II. c. II. 6.

A P I	A V C.	Coſſ.	Olymp.	A. Achaic	Praet.	
4483	523	M. Pomponius Matho II C. Papirius Maſo	2	50	25	ARATVS X. c. II. 6.
4484	524	M. Aemilius Barbula M. Iunius Pera	2/3	51	26	MARCVS Carynenſis. Vincitur bello nauali cum Illyriis et naue merſa perit. c. II. 6.
4485	525	L. Poſtumius Albinus Cn. Fuluius Centumalus	3/4	52	27	LYSIADES III. c. II. 5. 6. Athenae Achaeorum factae per deditionem.
4486	526	Q. Fabius Maximus II. S. Caruilius Maximus	CXXXVIII 4/1	53	28	ARATVS XI. c. II. 5.
4487	527	P. Valerius Flaccus M. Atilius Regulus	1/2	54	29	ARISTOMACHVS Argiuus. c. II. 5. Simultates cum Cleomene Spartanorum tyranno ſuſceptae.
4488	528	M. Valerius Meſſala L. Apuſtius Fullo	2/3	55	30	ARATVS XII. c. II. 5. Clades Achaeorum ad Lycaeon. Mantinea occupata, ad Megalopolin res male, ad Orchomenium bene geſta.
4489	529	L. Aemilius Papus C. Atilius Regulus	3/4	56	31	TIMOXENVS c. II. 5.
4490	530	Q. Fuluius Flaccus II. T. Manlius Torquatus	CXXXIX. 4/1	57	32	HYPERBATES. c. II. 5 Clades Achaeorum ad Hecatombaeon accepta.
4491	531	C. Flaminius Nepos P. Furius Philo	1/2	58	33	ARATVS XIII. c. II. 5 Bellum Cleomenicum paullo ante hunc praetorem hieme coepit.
4492	532	M. Claudius Marcellus Cn. Cornelius Scipio II.	2/3	59	34	TIMOXENVS c. II. 5. 9. Cleomenes victus fugatusque, Sparta capta.
4493	533	P. Cornelius Aſina M. Minucius Rufus	3/4	60	35	ARATVS XIV. c. II. 9. Clades Achaeorum ad Caphyas. Sociale bellum in Aetolos decernitur. c. II. 9.
4494	534	L. Veturius Philo C. Lutatius Catulus	CXL. 4/1	61	36	ARATVS minor, Arati, praetoris filius. c. II. 9. Bellum ſociale geſtum.
4495	535	M. Liuius Salinator L. Aemilius Paullus	1/2	62	37	EPERATVS Pharaeenſis c. II. 9.

A P.I.	A.V.C.	Coſſ.	Olymp.	A. A.	Praet.	
4496	536	P. Cornelius Scipio Ti. Sempronius Longus	2/3	63.	38	ARATVS XV. c. II 9. Pax cum Aetolis.
4497	537	C. Flaminius Nepos II. Cn. Seruilius Geminus	3/4	64	39	
4498	538	C. Terentius Varro. L. Aemilius Paullus II.	CXLI. 4/1	65	40	
4499	539	Ti. Sempronius Gracchus Q. Fabius Maximus III.	1/2	66	41	
4500	540	Q. Fabius Maximus IV. M. Claudius Marcellus	2/3	67	42.	
4501	541	Q. Fabius Verrucoſi F. Maximus Ti. Sempronius Gracchus	3/4.	68.	43.	ARATVS XVI. c. II. 4. Philippus rex Meſſenios adfligit c. II. 4.
4502	542	App. Claudius Pulcher Q. Fuluius Flaccus III.	CXLII. 4/1	69	44	ARATVS XVII. c. II. 4. *Veneno perit.*
4503	543	P. Sulpicius Galba C. Fuluius Centumalus.	1/2	70	45.	EVRYLEON. *c. III.* 2.
4504	544	M. Claudius Marcellus M. Valerius Laeuinus II.	2/3	71	46	CYCLIADES. c. III. 2. Aetoli et Elei ad Lariſſam cum Achaeis praelium committunt.
4505	545	Q. Fabius Maximus V. Q. Fuluius Flaccus IV.	3/4	72	47	
4506	546	M. Claudius Marcellus T. Quinctius Crispinus	CXLIII. 4/1	73	48	NICEAS c. III 2.
4507	547	M. Liuius Salinator II. C. Claudius Nero	1/2.	74	49	PHILOPOEMEN Megalopolitanus I. c. III. 2. Ad Mantineam victi Spartani.
4508	548	Q. Caecilius Metellus. L. Veturius Philo	2/3.	75	50.	PHILPOEMEN II. c. III. 2.
4509	549	P. Cornelius Scipio L. Licinius Craſſus	3/4.	76	51.	ARISTAENETVS Dicus c. III. 2.
4510	550	M. Cornelius Cethegus P. Sempronius Tuditanus	CXLIV. 4/1	77	52.	
4511	551	Cn. Seruilius Caepio C. Seruilius Geminus	1/2.	78.	53.	
4512	552	Ti. Claudius Nero M. Seruilius Geminus	2/3	79	54.	LYSIPPVS c. III. 3.
4513	553	Cn. Cornelius Lentulus P. Aelius Paetus	3/4	80.	55	PHILOPOEMEN III. c. III. 3.
4514	554	P. Sulpicius Galba C. Aurelius Cotta	CXLV. 4/1	81.	56	CYCLIADES. c. III. 4.
4415	555	L. Cornelius Lentulus P. Villius Tappulus.	1/2.	82.	57	ARISTAENVS Megalopolitanus. c. III. 4.

4416

A.P.I.	A.V.C.	Coſſ.	Olymp.	A. Achaic.	Praet.	
4516	556	Sex. Aelius Paetus Catus T. Quinctius Flamininus	2/3	83	58	NICOSTRATVS c. III. 4
4517	557	C. Cornelius Cethegus Q. Minucius Rufus	3/4	84	59	ARISTAENVS. c. III. 4
4518	558	L. Furius Purpureo M. Claudius Marcellus	CXLVI. 4/1	85	60	
4519	559	M. Porcius Cato L. Valerius Flaccus	1/2	86	61	ARISTAENVS II. c. III. 4
4520	560	P. Cornelius Scipio Africanus II. P. Sempronius Longus	2/3	87	62	
4521	561	L. Cornelius Merula Q. Minucius Thermus	3/4	88	63	
4522	562	L. Quinctius Flamininus Cn. Domitius Ahenobarbus	CXLVII. 4/1	89	64	PHILOPOEMEN IV. c. III 5
4523	563	P. Cornelius Scipio Naſica M'. Acilius Glabrio	1/2	90	65	DIOPHANES c. III. 5.
4524	564	L. Cornelius Scipio C. Laelius	2/3	91	66	
4525	565	Cn. Manlius Vulſo M. Fuluius Nobilior	3/4	92	67	PHILOPOEMEN V. c. III. 6.
4526	566	M. Liuius Salinator M. Valerius Meſſala	CXLVIII. 4/1	93	68	PHILOPOEMEN VI. c. III. 6.
4527	567	M Aemilius Lepidus C. Flaminius Nepos	1/2	94	69	PHILOPOEMEN VII. c. III. 7.
4528	568	Sp. Poſtumius Albinus Q. Marcius Philippus	2/3	95	70	
4529	569	Ap. Claudius Pulcher M. Sempronius Tuditanus	3/4	96	71	ARISTAENVS c. III. 7.
4530	570	P. Claudius Pulcher L. Porcius Licinius	CXLIX. 4/1	97	72	LYCORTAS c. III. 7.
4531	571	Q. Fabius Labeo M. Claudius Marcellus	1/2	98	73	PHILOPOEMEN VIII. a Meſſeniis capitur et veneno necatur. c. III. 1. 7. LYCORTAS ſuffectus c. III. 1.
4532	572	L. Aemilius Paullus Cn. Baebius Tamphilus	2/3	99	74	LYCORTAS c. III. 1.
4533	573	P. Cornelius Cethegus M. Baebius Tamphilus	3/4	100	75	
4534	574	A. P ſtumius Albinus C. Calpurnius Piſo	CL. 4/1	101	76	LYCORTAS c. IV. 1.
4535	575	Q. Fuluius Flaccus L. Manlius Acidinus	1/2	102	77	HYPERBATVS c. IV. 1.

A.P.I.	A.V.C.	Coſſ.	Olymp.	A. Achaic.	Praet.	
4536	576	M. Iunius Brutus A. Manlius Vulſo	2/3	103	78	CALLICRATES Leonteſius c. IV. 1
4537	577	C. Claudius Pulcher Ti. Sempronius Gracchus	3/4	104	79	
4538	578	Q. Petilius Spurinus Cn. Cornelius Scipio Hiſpalus.	CLI. 4/1	105	80	
4539	579	P. Mucius Scaeuola M. Aemilius Lepidus II.	1/2	106	81	XENARCHVS c. IV. 2
4540	580	Sp. Poſtumius Albinus M. Mucius Scaeuola.	2/3	107	82	
4541	581	L. Poſtumius Albinus M. Popilius Laenas.	3/4	108	83	
4542	582	C. Popilius Laenas P. Aelius Ligur	CLII. 4/1	109	84	ARCHON c. IV. 2.
4543	583	P. Licinius Craſſus C. Caſſius Longinus	1/2	110	85	XENON alterutro ex his annis praetor fuit. c. IV. 3.
4544	584	A. Hoſtilius Mancinus A. Atilius Serranus	2/3	111	86	
4545	585	Q. Marcius Philippus Q. Seruilius Caepio	3/4	112	87	ARCHON. c. IV. 3.
4546	586	L. Aemilius Paullus II. C. Licinius Craſſus	CLIII. 4/1	113	88	
4547	587	Q. Aelius Paetus M. Iunius Pennus.	1/2	114	89	Mille Achaei et amplius Romam euocati ad cauſſam dicendam
4548	588	C. Sulpicius Gallus M. Claudius Marcellus.	2/3	115	90	CALLICRATES c. IV. 4
4549	589	T. Manlius Torquatus Cn. Octauius Nepos	3/4	116	91	
4550	590	A. Manlius Torquatus Q. Caſſius Longinus	CLIV. 4/1	117	92	
4551	591	Ti. Sempronius Gracchus M'. Iuuentius Talna	1/2	118	93	
4552	592	P. Cornelius Scipio Naſica C. Marcius Figulus	2/3	119	94	
4553	593	M. Valerius Meſſala. C. Fannius Strabo.	3/4	120	95	
4554	594	L. Anicius Gallus M. Cornelius Cethegus	CLV. 4/1	121	96	
4555	595	Cn. Cornelius Dolabella M. Fuluius Nobilior	1/2	122	97	
4556	596	M. Aemilius Lepidus C. Popilius Laenas II.	2/3	123	98	

A.P.I.	A.V.C	Coſſ.	Olymp.	A. Achaic.	Praet.	
4557	597	Sex. Iulius Caeſar L. Aurelius Oreſtes	$\frac{3}{4}$	124	99	
4558	598	L. Cornelius Lentulus C. Marcius Figulus	CLVI. $\frac{4}{1}$	125	100	
4559	599	P Cornelius Scipio Naſica M. Claudius Marcellus II.	$\frac{1}{2}$	126	101	
4560	600	Q. O,imius Nepos L. Poſtumius Albinus	$\frac{2}{3}$	127	102	
4561	601	Q. Fuluius Nobilior T. Annius Luſcus	$\frac{3}{4}$	128	103	
4562	602	M. Claudius Marcellus III. L. Valerius Flaccus	CLVII. $\frac{4}{1}$	129	104	
4563	603	L. Licinius Lucullus A. Poſtumius Albinus	$\frac{1}{2}$	130	105	
4564	604	L. Quinctius Flamininus M'. Acilius Balbus	$\frac{2}{3}$	131	106	MENALCIDAS Spartanus. c. IV. 5.
4565	605	L. Marcius Cenſorinus L. Calpurnius Piſo	$\frac{3}{4}$	132	107	DIAEVS Megalopolitanus c. IV. 5. Achaei e cuſtodia a Romanis dimiſſi. c. IV. 4.
4566	606	Sp. Poſtumius Albinus L. Calpurnius Piſo	CLVIII. $\frac{4}{1}$	133	108	DAMOCRITVS c. IV. 5.
4567	607	P. Cornelius Scipio Africanus C. Liuius Druſus	$\frac{1}{2}$	134	109	DIAEVS c. IV. 5.
4568	608	Cn. Cornelius Lentulus L. Mummius Achaicus	$\frac{2}{3}$	135	110	CRITOLAVS. Cecidit in acie aduerſus Romanos c. IV. 5. DIAEVS ſuffectus c. IV. 5. Corinthus deleta. c. IV. 5.
4569	609	Q. Fabius Maximus Aemilianus L. Hoſtilius Mancinus	$\frac{3}{4}$	136	111	
4570	610	Ser. Sulpicius Galba L. Aurelius Cotta	CLIX. $\frac{4}{1}$	137	112	

FASTI ACHAICI ILLVSTRATI.

T. S. B.

CAPVT PRIMVM.

INITIA REIPVBLICAE ACHAICAE.

Achaei magnum Homericis temporibus nomen, Spartam, Argos et omnem inferiorem Peloponneſum olim incoluerunt. Cum autem Heraclidae eos his agris expuliſſent, recepti ſunt ab Ionibus, qui tunc inde a finibus Corinthi occiduum litus Peloponneſi tenebant, regionem ab ipſo ſitu Aegialeum dictam, deinceps enim *Ionia* ab incolis nominata eſt. (1) Rex tum erat Achaeorum Tiſamenus Oreſtis filius. Inde coorto diſſidio Iones ab Achaeis tota regione exterminati ſunt. Pulſis Ionibus, ſub regum poteſtate Achaei manſerunt vsque ad Ogygum ſeu Gygem: vtrumque enim nomen apud Polybium exſtat. (2) Ogygi autem filiorumque eius impotentia exacerbati Achaei, ſublata tyrannide, popularem ſtatum induxerunt. Ex eo diuiſum eſt Achaicum nomen in duodecim πόλεις, *ciuitates*, ſeu, vt alias iidem ſcriptores edunt, μέρη, *regiones*. Non tamen eaedem ciuitates ſemper recenſitae ſunt eo in numero, aliis deletis clade aliqua, aliis in Achaicum corpus illarum loco receptis. Herodotus (3) haec nomina ſuae aetatis ciuitatum edidit: *Pellenen*, *Aegiram*, *Aegas*, *Buram*, *Helicen*, *Aegium*, *Rhypes*, *Patrees*, *Pharees*, *Olenum*, *Dymen*, *Tritaeees*. Ταῦτα, inquit, δυώδεκα μέρεα νῦν Αχαιῶν ἐςι καὶ τότε γε Ιώνων

(1) Strabo, Pauſanias. (2) p. 178. 375. (3) l. I. c. 145.

Ἰώνων ἦν. Polybius (4) autem has libera in republica ciuitates recenſet: *Patras*, (*Patrees* Herodoti) *Dymam*, *Pharas* (*Pharees* Herodoti) *Tritaeam* (*Tritaees* Herodoti) *Leontium*, *Aegiram*, *Pellenen*, *Aegium*, *Buram*, *Ceraunium*, *Olenum*, *Helicen*. Nullae tum Herodoti *Aegae* et *Rhypes*. Earum in loco ſucceſſere *Leontium* et *Ceraunia*. Pauſanias tamen (5) nomina Achaicarum ciuitatum, vt fuere ſub regibus, paullo aliter edidit, quam Herodotus, vt nunc quidem in Pauſaniae exemplaribus eſt: *Dymam*, *Olenum*, *Pharas*, *Tritiam*, *Rhypes*, *Eaſium*, *Cecyrinam*, *Buram*, *Helicen*, *Aegas*, *Aegiram*, *Pellenen*. Pro eo, quod eſt in Pauſania Εάσιον, Amaſaeus Θάσιον cenſuit legendum: at Sylburgius non abſurde pro Εάσιον ſcriptum a Pauſania putat Αἴγιον, vt in eo nihil ab Herodoto differat. Cecyrinam vero Pauſaniae idem Sylburgius recte cenſet, eiusdem Pauſaniae et Strabonis Κεραυνίαν, aut potius, vt Pauſanias aliis in locis, Κερύνειαν eſſe: Καρύνειαν tamen malim, ex quo eſt Καρυνεὺς Polybii. Haec ciuitas ex poſterioris memoria temporis irrepſit in catalogum Pauſaniae. Nam cum haec duodecim nomina ſint, tamen non multo poſt Pauſanias etiam Patras adſcribit, vt ſint tredecim ciuitates, inuito et repugnante ipſo Pauſania. Carynia loco mota, repoſitis Patris, emendato Eaſio, vt ſit Aegium, Herodotus et Pauſanias in nominibus concordant. Aegas et Rhypas cur praetermiſerit Polybius, Strabo declarat: (6) Aegam

(4) p. 179. (5) p. 536. (6) Strabo p. 441. 442.

Aegam enim, ſeu alio nomine Aegas, non habitari tradit, agrum Aegienſium eſſe: Rhypes autem, Myſcelli illius patriam, qui Crotonem condidit, item eſſe nullas, agro inter Aegienſes et Pharienſes diuiſo. Et Pauſanias quoque tantum ruinas Rhyparum ſua aetate exſtitiſſe ait. Crotona a Myſcello condita eſt Olympiade XI. aut XII. (7) quod ſatis vetus tempus eſt florentiſſimae vrbis. Quaeuis τῶν δυώδεκα μερίδων rurſum in ſeptem aut octo δήμους ſeu *populos* diſtribuebatur: τοσοῦτον, inquit Strabo, (8) εὐανδρεῖν τὴν χώραν συνέβαινεν. Inde vsque a libertate recuperata, nulla admodum re, niſi iuſtitiae et aequitatis laude celebrati ſunt Achaei. Neque enim Perſicis in bellis ſubſidia miſere ad Thermopylas, aut ad Euboeam aut Salaminem. Sic Pauſanias. (9) Quod autem addit, οὐδὲ σφᾶς καταλόγος συμμάχων ἔχει Λακωνικὸς ἢ Ἀττικός, id ad illa ipſa bella pertinet. Nam tametſi, vt idem teſtatur Pauſanias, ad Plataeas ſubſidia miſere Graecis aduerſus Mardonium, tamen, quia non venerunt in tempore, in communi Graecorum donario, quod Olympiae dedicatum eſt, Achaeorum nomen ceteris ſociis non fuit adſcriptum. Bello Peloponneſiaco, vt vel e Thucydide conſtat, Athenienſibus fauerunt, nullo admodum inſigni motu rerum. Quare oraculum, vt ſupra poſui, perquam ignominioſe tractauit Aegienſes, vt Achaeorum longe viliſſimos. Aſt vbi

(7) Strabo p. 291. eodem anno, quo Syracuſae. V. etiam Heraclidem in politiis Graecorum p. 2833. ed. Gronouii. (8) p. 441. (9) p 536.

vbi Helice terrae motu concuſſa (id autem accidit Olympiadis CI. 4. vt ſupra declaraui) Aegium agri Heliceníis acceſſione auctum, caput extulit, (10) iam inde dignitate et opibus longe inter ceteras vrbes maximis fuit. Id accidit duobus ante Leuctricam pugnam annis. Poſtquam ea in pugna fractae ſunt Lacedaemoniorum vires, Arcades autem et Meſſenii contra eos arma cepere, Thebani a Macedonibus deuicti, Athenienſes debilitati, nihil in commune conſulebatur, Achaei diuturna pace et libertate (praeter Pellenen, quae tum adhuc ſub tyranno erat) viribus ad audendum comparatis, aliquo haberi in honore coeperunt. Hanc potentiam, praeſertim cum ad Chaeroneam in acie ſtetiſſet contra Philippum regem, (1) Macedones inique ferre, premere deinde Achaeos, donec diuerſis ſtudiis partium animos populi diſſociarent, vt aliae ciuitates tyrannos, aliae praeſidia Macedonica reciperent. (2)

II. Tandem conſpirarunt Dimaei, Patrenſes, Tritaeenſes, et Phareenſes ad concordiam et recuperandam libertatem, Ol. CXXIV. quarto anno. Quinto poſt anno, Aegienſes, eiecto praeſidio Macedonico et Burii, interfecto tyranno, Carynenſes autem (Καρυνᾶς fuere, qui Κεραυνίαν Polybii et Strabonis, vt ſupra retuli, incolebant) tradente vrbem tyranno, in vnum et idem concilium coiernt. Acceſſere mox Sycionii extra Acha-

(10) Pauſanias p. 589. (1) E Pauſania et Polybio L. II. c. 38. ſeq.
(2) Polybius l. c.

iam. Forma ea rei publicae. Erat ſuus cuique ciuitati ſenatus, vt Liuius habet. (3) Hi ſunt ἄρχοντες Polybii. (4) Is autem ſcribit, cum Attalus Aegii in concilio poſtulaſſet, vt honores Eumenis regis fratris ſui reſtituerentur, decretum concilii ad ciuitates eſſe miſſum, quo iubebant τοῖς ἄρχουσι πάσας ἀποκαταςῆσαι τὰς Εὐμένους τιμάς. Per ſe autem quisque intelligere poteſt, τοὺς ἄρχοντας ſenatus cuiusque fuiſſe praeſides et rectores. Erant et Damiurgi pro ciuitatum numero, donec decem Damiurgi lege inſtituerentur, ſummus populi Achaici magiſtratus. (5) Primis quinque et viginti annis omnes Achaei Γραμματέα κοινὸν ἐκ περιόδου καὶ δύω Στρατηγοὺς, *Scribam vnum communem e ſingulis ſecundum ordinem ciuitatibus et duos praetores* elegerunt. (6) Poſt id viſum eſt populo commodius factum, ſi vnus Στρατηγὸς ſeu praetor quotannis exercitui praeficeretur, et ſecundum eum Ιππάρχης eſſet, ſeu magiſter equitum, magiſtratus ipſe, Ιππαρχία. (7)

III. Praetorem ius erat conuocare damiurgos, damiurgi de quibus rebus erat conſultandum, praetore communicante, ſenatum populumque ſingularum vrbium conſulebant. Deliberatione priuatis in concionibus inita, Damiurgi vocabant concilium Achaicum etiam extra tempus lege ſtatutum, ſi ita videretur. Concilia enim populi ſtatuta tantummodo bis habita quotannis, ſub verem et autumnum. Vbi in vnum conuenerant, praetor qui con-

(3) l. XXX. c. 19. (4) p. 1246. (5) Liuius l. XXXVIII. 30. XXXII. 22. (6) Polybius p. 181. (7) Polybius p. 181. 1244. 1398.

concilio praeſidebat, Ioue, Apolline, Hercule auſpicii cauſſa vocatis, de quibus conſultandum eſſet, in medium proponebat. Suadentibus aliis, aliis diſſuadentibus, ſi maior Damiurgorum pars conſentiret, referebatur ad populum. Tertio die decretum iuſti concilii fieri, ex lege erat. Eo in concilio, quod de bello aduerſus Philippum regem cum Romanis gerendo habitum eſt, Sex. Aelio Paeto, T. Quinctio Flaminino Coſſ. quinque Damiurgi relaturos ſe oſtendebant: quinque alii duos dies tenebant, ne decretum recitari et perrogari ſententiae poſſent, donec Memnon Pellenenſis aduerſae partis vnus et minis et precibus Rhiſiaſi, pater is erat Memnonis, ad Damiurgorum, qui Romanis ſtudebant factionem tertio die traductus, numero iubentium acceſſit. Sic relatum eſt ad populum. Dymaei et Megalopolitani, priusquam lex ferebatur a populo, ne ea tenerentur, concilio exceſſerunt. Aliis de rebus, quam de quibus ante concilium cum ſenatu populoque ſingularum ciuitatum communicatum fuiſſet, agi in conciliis non placuit. Itaque Caecilio legato Romano negarunt concilium gentis ſe daturos Damiurgi, niſi ſcripta mandata ederet, de quibus antea domi conſideraret populus. Praetoris erat, hortari, vt de communi re ſua conferrent, ſuaderent, diſſuaderent, expenderent aequa lance rationes ſuas, ex animi ſui ſententia nihil ipſe dicebat, ſi de bello disceptaretur. Quapropter Philopoemen praetor apud Liuium: (8) *bene comparatum apud Achaeos eſſe, ne*

 prae-

praetor cum de bello conſuluiſſet, ipſe ſententiam diceret: ſtatuere quam primum ipſos, quid vellent iuſſit, praetorem decreta eorum cum fide et curae exſecuturum. Caeteris in rebus inuenio praetorem ſententiam dixiſſe ſuam, ſuaſorem disſuaſorem fuiſſe. Cum de Eumenis regis honoribus Aegii ageretur, Archon praetor vt Attali legatorum precibus ſubueniret, ſurrexit ad dicendum. Res enim, inquit Polybius, ipſa poſtulabat, vt praetor diceret. Pauca in rem locutus, ne corruptus fuiſſe cenſeretur, e conſilio disceſſit. At tum Polybius, qui magiſter equitum erat, ſurrexit, et ſermonem habuit, factumque eius in verba decretum eſt. (9)

IV. Huius concilii fundamenta primus iecit Marcus Carynenſis, Philopoemen opus perfecit, Lycortas confirmauit. Primo tempore cum pro regno ſtatus coepit eſſe popularis, concilia in Aenario luco ſunt coacta: poſt recuperata libertate, Aegii haberi placuit. Sic Pauſanias et Strabo. Liuius, (10) *ſeu dignitate*, inquit, *vrbis ſeu loci opportunitati datum eſt.* Nonnumquam tamen poſtea Argis, et Sicyone, et Corinthi, et Tegeae, et Rhii, et Megalopoli extra ordinem conuentus indicti. Id vero etiam egit Philopoemen praetor, vt omnibus in ciuitatibus, quae Achaici eſſent nominis, conuentus ex ordine celebrarentur. Cum ſuper ea re legem pararet promulgare, conuentumque Argos indiceret, Damiurgi Aegium euocarunt populum. M. Fuluius Aegienſium fauebat cauſſae, Argos tamen venit, vbi cum

(8) l. XXV. 25. (9) p. 1244. Cetera fere e Polybio p. 1279. ſeq. a Pauſanias p. 544. (10) l. XXXI. 25. XXXII. 19.

cum diu multumque diſceptatum eſſet, praetorque rem inclinatam cerneret, ab incepto deſtitit. (1) Obtinuere tamen ceterae vrbes, vt tandem etiam aliis in vrbibus conueniretur.

V. Conuentus, vt dixi, iuſti in modum concilii coacti ſunt quotannis duo. Vnus vere exeunte ſub exortum Pleiadum, vt teſtatur Polybius, (2) alter ſub auctumno. Henricus Doduellus (3) cum variae ſint huiusce ſideris in parapegmatibus Graecis ἐπιτολαὶ, putat a Polybio iſthuc tempus indicari, quo aeſtas ceperit ſecundum Plinium. Nam Plinius ita fatur: (4) *Vergiliae priuatim attinent ad fructus, vt quarum exortu aeſtas incipit, occaſu hiems, ſemeſtri ſpatio inter ſe meſſes vindemiasque et omnium maturitatem complexae.* Et ille quidem pro parapegmate Romano ad VI. Idus Maias Vergiliarum exortum conſtituit. Varro autem (5) ad VII. Idus Maias, a quo die Columella quoque aeſtatem orditur, vt in Plinio putem emendandum, ſic vt eſt in Varrone. Geoponici ſcriptores, Florentinus (6) (quamquam hic quoque Varronem ſequitur et praeterea corruptus eſt) Quintilii fratres, Proclus, Ioannes Tzetzes Heſiodeſus ſcholiaſta (7) intra initia Maii atque Nouembris ruſticis ſuis definiunt et verem potius exeuntem, quam aeſtatis initium in Vergiliarum exortu ponunt. Georgius Syncellus (8) Μαΐῳ ἐννάτῃ τὴν τῶν Πλῃϊάδων ἐπιτολὴν

 con-

(1) Liuius l. XXXVIII. 30. (2) p. 424. 487. (3) in Cyclis p. 291. (4) l. XVIII. 29. (5) de re ruſtica l. I. 28. (6) p. 4. 14. (7) p. 91. ſeq. (8) Variarum Diſſertationum Petauii l. II. c. 29.

conſtituit: hoc item eſt VII. Id. Maias. Sed non opus eſt, vt multa hic colligam; nam Dionyſius Petauius (*) ſumma diligentia et accuratione id ipſum egit, vt oſtenderet, ad XI. Maii matutinum ortum Φαινόμενον eius ſideris fuiſſe relatum. Iam cum exortu Heliaco Pleiadum et aeſtas et meſſis exordiebatur in Graecia et annus Achaicus. Heſiodus

Πληϊάδων Ἀτλαγενέων ἐπιτελλομενάων
Ἄρχεσθ' ἀμήτȣ, ἀρότοιο δὲ δυσσομενάων

Aratus; Iupiter, ait, Pleiadibus

ἢ θέρεος ἢ χείματος ἀρχομένοιο
Σημαίνειν ἐκέλευσεν, ἐπερχομένȣ τ' ἀρότοιο.

Sic Manlius, ſic omnes. De anno Achaico Polybius (9) τὸ μὲν ȣ̂ν κατὰ τὴν Ἀράτȣ τȣ̂ νεωτέρȣ ϛρατηγίαν ἔτος ἐτύγχανε διεληλυθὸς περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιτολήν. οὕτω γὰρ ἦγε τȣ̀ς χρόνȣς τὸ τῶν Ἀχαιῶν ἔθνος, *annus praeturae Arati elapſus erat circiter Pleiadum exortum: ſic enim agebat annum populus Achaeus.* De concilio autem (10) in quo comitia legendis praetoribus egerint Achaei, eundem in modum, iisdem verbis, περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιτολήν. In verno igitur concilio deſignati ſunt. Sed intercedebat aliquot dierum tempus inter comitia eumque diem, quo die praetores deſignati magiſtratum inierunt. Nam cum Aetoli Meſſenios Olympiadis CXXXIX. 4. adorti et in ſolemni concilio querelae ſociorum ad Achaeos perlatae eſſent, bello

(*) l. c. (9) l. V. c. 1. (10) p 487.

bello in Aetolos decreto, Aratus deſignatus eſt praetor. Cum autem Timoxenus, qui a concilio praeturam nondum depoſuerat, lentius agere videretur delectu habendo rebusque apparandis, Aratus id ipſum aegre ferens, vt maturaret auxilium, quinque diebus magiſtratum anticipauit, et a Timoxeno publicum ſigillum recepit, id enim praetoris in manu erat. (1) Et de Archone Polybius, (2) decretum fuiſſe in concilio, in quo fuerat deſignatus, vt illico procederet praetor, quia bellum inſtabat Romanum cum Perſeo. Ex quibus intelligo, initium anni Achaici fuiſſe ipſo in exortu Heliaco Pleiadum circiter XI. Maii eodem quoque die praetores iniiſſe magiſtratum atque ita eſſe interpretandum Polybii alterum locum περὶ τὴν ἐπιτολὴν *ipſo in exortu*: alterum, vbi de concilio agit, *circiter exortum* ſignificare, ſeu aliquot diebus ante, vt populus ab ipſo concilio tempus haberet proficiſcendi in agros, ad meſſem faciendam. Polybius igitur etiam diſertis verbis teſtatur, (3) exeunte vere deſignatos fuiſſe praetores, ineunte aeſtate, hoc eſt, non ita multis poſt diebus coepiſſe in magiſtratu eſſe. Eandem rationem ſeruatam puto in concilio altero ſtato *ſub auctumno*, vt Liuii ipſo verbo vtar: (4) fuiſſe enim celebratum exeunte auctumno, medio anno Achaico, cum rebus bello gerendis tempus iam exiiſſet et operae agreſtes feriarentur.

VI.

(1) Polyb. l. IV. 61. (2) p. 1244. (3) p. 424. (4) l. c.

VI. Primi ex Achaeis Dymaei cum Patrenſibus, Tritaeenſibus et Pharaeenſibus in libertatem et commune concilium conſpirarunt Olympiade CXXIV. vt Polybius teſtatum reliquit. Plutarchus, qui ſua ex Arati Sicyonii praetorii viri commentariis accepit, annum edidit nullum, tantum cum Pyrrhi in Italiam expeditione motum populi Achaici connectit. Nimirum Pyrrhus res primum geſſit cum P. Laeuino Cos. A. V. C. 474. ſed magiſtratum inierat Kal. Quintilibus A. P. I. 4433. vt tum fuiſſe compertum habemus, (6) itaque *Olympiadis* CXXIV. 4. paullo ante inito. Bellum *Tarentinum* anno ante Pyrrhi expeditionem coepit, teſte Pauſania in Atticis: (7) τούτοις δὲ τῷ πρότερον ἔτει πρὸς Ρωμαίους συνεστήκει πόλεμος, vt Caſaubonus docte emendauit in commentario Polybiano. (8) Cauſſa belli, vt ex Dionyſii excerptis conſtat, C. Fabricio, Q. Aemilio Coſſ. probro apud Tarentinos adfectis legatis Romanis. Inter eos Coſſ. et P. Valerium Laeuinum annus interceſſit vnus, quo L. Aemilius, Q. Marcius Coſſ. bellum cum Tarentinis ex voto geſſerunt. Tum vero Tarentini bello *impares*, A. V. C. 473. extremo, Pyrrhum auxilio vocarunt, isque cum claſſe, ne exſpectato quidem vere, vt Zonaras e Dionyſio docet, in Italiam profectus: ergo A. V. C. 474. Olymp. CXXIV. 4. A P. I. 4434 Id amplius ſtabiliendum duco. Polybius (9) Romanos cum Gallis pacem feciſſe ſcribit

(5) Polyb. l. IV. c. 6. Plutarchus in Arato p. 1049. (6) V. Doduellus in cyclis Romanis p. 586. (7) p. 28. (8) p. 118. (9) p. 151.

bit triennio ante Pyrrhi expeditionem, quinque ante Delphicam Gallorum cladem annis, Galli ad Delphos acciſi ſunt, teſte Pauſania in Phocicis, (10) Olympiadis CXXV. 2. Ad eundem annum Phlegon Trallianus, aut potius Eratoſthenes Cyrenaeus in Ὀλυμπιονικῶν συναγωγῇ habet τὴν Κελτῶν ἀπώλειαν. Addit Pauſanias, Anaxicrate archonte Athenis: et Anaxicratem ait archontem fuiſſe, cum Ladas Aegienſis ſtadia vicit. Ladas vicit Olympiadis CXXV. 1. Gorgia tum maxime archonte Athenis. Secundum Gorgiam Anaxicrates Athenis magiſtratum geſſit, vt teſtatur Eratoſthenes in Olympionicis. Iam ſi duobus annis ante Pyrrhus traiecit, confirmatur noſtra ratio. Et tribus annis ante Pyrrhi expeditionem pax cum Gallis inita. Cornelius Dolabella Cos. Gallos Senones, Etruſcosque ad lacum Vadimonis vicit. Inter eum conſulem et Laeuinum duo conſulatus, duo anni interceſſere. Habes Olympiadis CXXIII. 4. tertium ante Pyrrhi expeditionem. Polybius quodam in loco, (1) Pyrrhum in Italiam veniſſe ſcribit vno anno priusquam Galli impreſſionem fecere in Graeciam: hi autem, ſi vno anno in Graecia commomorati Delphos inuaſerunt, ne hoc quidem impedit, quin Pyrrhus vere nouo Olympiadis CXXIX. 4. A. V. C. 474. traiecerit. Sed, vt verum fatear, non ita ſenſit Polybius. Nam cum Gallorum impreſſionem in Graeciam commemorat, non Macedonum cum Gallis res attingit, ſed ſolam

(10) p. 854. (1) l. 1. c. 6.

barbarorum excurſionem per ceteras in Graecia vrbes. Eam autem excurſionem clademque Delphicam et tranſitum Gallorum in Aſiam, vt ex verbis perſpicuum eſt, vno et eodem in anno recenſet. Sic Eratoſthenes quoque: ἡ τῶν Κελτῶν ἐς Ἑλλάδα ϛρατεῖα τε ϗ ἀπώλεια. Hoc vero intereſt inter Eratoſthenem et Polybium, quod is rem vtramque Olympiadis CXXV. 2. refert, hic autem anno vno ante, ſiue primo eiusdem Olympiadis. Niſi quid in Polybii verbis deprauatum ſit, memoriae is lapſus fuit: nam is ipſe Polybius alio in loco, vt ſupra declaraui, annos duos inter Pyrrhi expeditionem et Delphicam Gallorum cladem dedit. Denique Polybius notam temporis (2) expeditionis Italicae edidit, Ptolemaeum Lagi, Seleucum Nicatora, Lyſimachum, Ptolemaeum Ceraunum non magno interuallo deceſſiſſe. Hi vtique circa initium, medium et finem Olympiadis CXXIV. obierunt, qua ex re nihilo minus confirmata noſtra eſt ſententia.

VII. Hoc primum conſtituto, vt, ſi Pyrrhus vere A. V. C. 474. Italiam cum claſſe petiit, eodem autem anno Dymaei cum ceteris vrbibus Achaicae reipublicae fundamenta iecerunt, annus is ſit ab V. C. 474. Olympiadis CXXIV. 4. vergens in Olympiadem CXXV. audiendus porro eſt Polybius. (3) Annos, vt ex eo ſupra declaraui, primos XXV.

(2) l. II. 41. l. II. 70. (3) l. II. c. 43. Strabo tantum. 20. annos p. 440 ὡς ἐν παρόδῳ paullo negligentior.

XXV. ſcribam vnum et praetores duos habuere Achaei: ab illo autem tempore Marcum Carynenſem praetorem vnum, vnos praetores deinceps in ſingulos annos. Igitur Marcus Carynenſis praetor eſt factus anno XXVI. poſt Achaicam rem publicam conſtitutam, A. V. C. 499. Olympiadis CXXXI. 1. in ipſo Vergiliarum exortu, vt ſupra quoque demonſtrati. Atque ita etiam Caſaubonus in chronologia Achaica.

VIII. Circiter quintum annum, hoc eſt, 39 Achaico A. V. C. 503. Olympiadis CXXXII. ½ Aegienſes praeſidium Macedonicum oppido eiecerunt: ſecuti eos Burii, occidere tyrannum. Iſeas autem tyrannus Carynenſis id ipſum metuens, vrbem tradidit. (4) Inde, vt dicam poſtea, alii atque alii ſocii acceſſerunt, eorumque nomina lapideo foederis monumento, fidei cauſſa inſcripta ſunt. (5)

Caput Secundum

De decem atque ſeptem praeturis Arati Sicyonii.

VT praetores populi Achaici ſuis annis inſeramus diligentia maxime adhibenda eſt in ordinandis ſeptemdecim praeturis Arati Sicyonii: has vt conſtituamus, ante omnia opus eſt, annum cognoſci, quo Sicyon libertatem recuperauit

(4) Polybius l. II. c. 41. (5) Polybius p. 387. (6) p. 323.

uit Arati ope. Polybius hoc quod quaerimus, docet. Sed animus adhibendus eſt, ne in interpretando Polybio offendamus. Τετάρτῳ δ᾽ ὕστερον ἔτει τοῦ προειρημένου στρατηγοῦντος annos natus viginti Aratus patriam liberauit. Vt antea exul fuerit Argis, vt comparata parua manu Sicyonem nocte occupauerit, vt Nicocles tyrannus fuga ſalutem quaeſiuerit, Plutarchus in Arati vita narrat. Ne vero ſic interpretere Polybium, vt Caſaubonus: Marcum Carynenſem praetorem quartum fuiſſe, cum Sicyon liberata eſt a tyranno. Hoc enim Henricum Doduellum ſummum virum, in cyclis Laconicis (6) fefelliſſe opinor, vt poſt Marcum praetorem crederet praetorem primo fuiſſe Aratum Olympiadis CXXXII. 1. Nempe Polybius hic per ſaltum incedit. Marcum Carynenſem Olympiadis CXXXI. 1. et parte maxima anni ſecundi, ſeu ab ipſo initio aeſtatis A. V. C. 499. ad θερινὴν ὥραν A. V. C. 500. praetorem fuiſſe ſupra oſtendimus. Ab hoc praeturae anno quartum dicit Polybius, quo res geſſit Aratus Sicyone. *Poſt Marci primam praeturam quarto anno, eodem praetore Marco*, inquit Polybius. Non quod Marcus continuauerit magiſtratum, alioqui dicturus fuerat, τοῦ προειρημένου τὸ τέταρτον στρατηγοῦντος, non τετάρτῳ ἔτει τοῦ αὐτοῦ στρατηγοῦντος, *eodem, qui quatuor annis ante fuerat, praetore.* Et diſerte tradunt ſcriptores annuam fuiſſe praeturam, tum vero etiam Polybius a Marco primum praetore e Dimaeis, Tritaeenſibus aliarumq; vr-

(6) P. 323.

vrbium ciuibus praetores fuiſſe lectos, quorum nomina interciderunt. Igitur Sicyon capta eſt anno, Achaico XXX Olympiadis CXXXII ½. Addit Plutarchus (7) ipſum diem V. Daeſii, qui cum in Olympiadis CXXXII. primum annum incidit, ipſas Kal. Iunias demonſtrat iuxta tabulas Doduellianas. Monet nos Plutarchus, menſem eum Antheſteriona ab Athenienſibus vocitatum. Anteſtherion non exceſſit medium Martium in cyclo Harpali, nedum vt attingeret Maium, cum Daeſius intra Maium et Iunium iis temporibus coerceretur. Sed ratio illa Plutarchi, comparandi menſes Macedonicos cum Atticis, nondum ſatis explorata eſt, vt eum audeam erroris poſtulare. Ergo Sicyon capta eſt, cum Marcus Carynenſis non ita multis ante diebus praeturam ſuſcepiſſet.

II. Iam, inquit Polybius, anno conſtituto, quo Sicyon Achaeorum facta, ὀγδόῳ δὲ πάλιν ἔτει ϛρατηγὸς αἱρεθεὶς τὸ δεύτερον *Acrocorinthum cepit* Aratus. Cepit autem vrbem atque arcem, quae in Macedonum poteſtate erat, aſtu, vt prolixe narrat Plutarchus. Archelaus dux, vbi viuus in manus Achaeorum venit, dimiſſus eſt: Theophraſtus ducum alter, quod excedere vrbe nollet, occiſus: Perſaeus tertius, dum arx oppugnatur, fugit Cenchreas. Ille Zenonis philoſophi ſectator, cum poſtea aliquando de Zenonis paradoxo, ſolum ſapientem bonum eſſe ducem diſceptaretur, fer-

(7) p. 1051.

tur dixiſſe: τȣ̃το μάλιϛα κἀμοὶ πο7ε τῶν Ζήνωνος ἤρεσκε δογμάτων. νῦν δὲ με7αβάλλομαι νȣθετηθεὶς ὑπό τȣ̃ Σικυωνίȣ νεανίȣ, vt eſt apud Plutarchum.(8) Si numeremus ab illo, quem ſupra dixi, anno, octo alios annos, praetor iterum Aratus fuit Olympiadis CXXXIV. $\frac{1}{2}$. Aliam notam temporis Polybius ſubiecit: Corinthum captam eſſe ab Achaeis, anno vno antequam Carthaginienſes magno bello victi a Romanis, pacis conditiones acceperunt. Cladem dicit Carthaginienſium ad Aegates inſulas a C. Lutatio Cos. acceptam. Eam acceptam eſſe A. V. C. 512. Olympiadis CXXXIV. 2. exeunte, ſatis conſtat. Nondum enim adulta aeſtate commiſſum nauale eſt praelium: itaque paullo ante tertium eiusce Olympiadis annum. Fuit igitur Aratus praetor iterum a Maio menſe, qui incidebat in Olympiadis CXXXIV. primum annum, vsque ad Maium, qui Olympiadis CXXXIV. 2. anno agebatur. Nam res Aratus ad Corinthum geſſit τῇ περὶ θέρος ἀκμάζον ὥρᾳ, plenilunio: (9) hoc eſt, adulta aeſtate, quae eam aeſtatem anteceſſit, qua Carthaginienſis claſſis eſt victa. Ex quo Doduellus (10) argumentum ducit, nocte ea Acrocorinthum eſſe occupatam, quam Metageitnionis XVI. ſeu Sextilis Iuliani XII. dies excepit. Acceſſere rei geſtae magnitudine perculſi ad corpus Achaicum Epidaurii, Troezenii, qui Argoli-

(8) p 1037. adde Athenaeum p. 162. Polyaenum in Stratagematis l. VI. 24. Pauſaniam p. 130. (9) Plutarchus p. 1036. (10) in cyclis p. 292.

golicum litus tenebant et extra Iſthmum Megarenſes.

III. Nunc quoque prima praetura e Plutarcho deprehenditur. Scribit autem Plutarchus, Aratum pulſo Sicyonio tyranno adoleſcentem annorum viginti equo meruiſſe et magiſtratibus (damiurgos populi et archontas ciuitatum puta) percarum, praetoribus, ſiue Dymaeus aliquis, ſeu Tritaeenſis, ſeu ex aliquo alio oppido eſſet, dicto audientem enixe fuiſſe, cum cerneret exules a ſe Sicyonem reductos praediorum ſuorum poſſeſſoribus moleſtos, vt de vtrisque bene mereretur, profectum ad Ptolemaeum (is tum erat Euergetes Philadelphi filius) argenti ſummam, quanta ſatis erat, ad controuerſias Sicyonias ſedandas impetraſſe et regis animum confirmaſſe Achaeis. Inde iam ille reuerſus, cum ſumma apud Achaeos eſſet gratia, praetor factus eſt: ἐνιαυτῷ δ' ὕστερον, inquit Plutarchus, αὖθις στρατηγῶν, *anno interiecto iterum praetor*, Corinthum aggreſſus eſt. Si praetor fuit anno interiecto, prima praetura attribuenda eſt anno Achaico XI. qui inierat ineunte aeſtate Olympiadis CXXXIII. 3. Plutarchi interpres ἐνιαυτῷ ὕστερον enunciat Latine *inſequenti anno*. Perperam vero hoc, vt multa alia: nam id Plutarchus potius dixiſſet τῷ δ' ἑξῆς ἐνιαυτῷ. Et quod ipſe teſtatur Plutarchus, quod nobis etiam in progreſſu disquiſitionis noſtrae ſpectandum erit, Aratus alternis fere annis praetor fuit. Pauſanias quidem

vbi

vbi tradit, (1) Sicyonios ab Arato liberatos, αὐτίκα δὲ ϛρατηγὸς ἀπὸ τῶν Ἀχαιῶν ᾑρητο ait. Sed confuſa ſunt omnia eo in loco Pauſaniae, quaedam etiam ſuſpecta. Vt, cum ſcribit, Aratum Sicyonios, libertate reſtituta, ſui iuris eſſe voluiſſe, poſt vbi Macedones Antigono Philippi tutelam gerente, Graecis formidarentur, Sicyonios, quamquam Dorici generis erant, recepiſſe in Achaicum concilium. Cui rei palam aduerſatur Polybius (*) cum ſic ait: Aratus annos viginti natus patriam ereptam iugo tyranni virtute ſua et fortitudine, προσένειμε πρὸς τὴν τῶν Ἀχαιῶν πολιτείαν, ἀρχῆθεν εὐθὺς ἐραϛὴς γενόμενος τῆς προαιρέσεως αὐτῶν, *Achaicae rei publicae adiunxit: iam inde ſtatim a principio ſtudioſus inſtitutorum populi Achaici.* Habet ſua ex Arati ipſius commentariis Polybius: Pauſanias vero videtur aurem praebuiſſe Phylarcho, cuius quae fides ſit, Polybius (2) declarauit. Iam Sicyonios Achaeis adſcriptos demum habuit ſecundum Pauſaniam annus Achaicus 52. quoniam Demetrius rex vt infra demonſtrabo A. V. C. 525. decedens, Philippum filium ſub tutela Antigoni reliquit. Quae cum attigit Pauſanias, tum ille vero αὐτίκα δὲ ϛρατηγὸς Ἄρατος. Aut igitur vndecimam praeturam Arati anno 53. in animo habuit: aut primam ſi dicere voluit, vides vt omnia perturbauerit per ſummam negligentiam. Primam autem dicere

(1) p. 129. 130. Sic Strabo p. 440. ſcribit· "Aratum praetorem An-"tigono Acrocorinthum ademiſſe et patriam ſuam Achaeis adieciſſe et Mega-"renſes et Argos et Hermiona, Phliuntem, Megalopolin." Quibus in verbis nihil accurati, nihil chronologicum eſt. (*) p. 181. (2) p. 196.

dicere voluit, nam ea in praetura ait, contra Amphiſſenſes, Locros atque Aetolos duxiſſe, Corinthumque cepiſſe. Iterum alia perturbatio. In prima praetura quidem Aratus Locros et Calydoniam populatus Baeotis ſubſidio venit, pugna ad Chaeroneam commiſſa et Aboeocrito Boeotarche ab Aetolis caeſo: Corinthum vero ea in praetura non cepit, ſed vt ex iis, quae ſupra tradidi, colligitur, anno Achaico 38. Olympiadis CXXXIV. 2. anno inito.

IV. Nunc reliquas Arati praeturas perſequemur. Plutarcho (3) et Polybio teſtibus, Aratus multas praeturas aut continuatas aut alternis annis geſſit, donec in decima et ſeptima praetura lento veneno a procuratore Philippi regis, Taurione, necatus eſt. (4) Plutarchus maxime alienatum a Philippo rege ſcribit Aratum, poſtquam ille claſſem Romano bello amiſerat: tum enim regem infeſto animo inuaſiſſe Meſſenios, Arato vehementer Meſſeniorum vicem dolente. Polybius autem in excerptis mortem Arati ponit intra id tempus, cum M. Marcellus Syracuſas expugnauit, et Philippus rex Liſſum in Illyrico. Syracuſae ſunt captae, Q. Fuluio Flacco III. App. Claudio Coſſ. cum dies feſtus Dianae ageretur. (5) Hi Coſſ. fuere, A. Varroniano 542. ab Olympiadis CXLI. 4. anno, ita vt iis Coſſ. Olympiadis CXLII. 1. annus inierit. Philippo autem regi ſuſpecto iam

(3) p. 1038. (4) Plut. p. 1047. Polyb. p. 722. (5) Liuius l. XV. 23

antea bellum denique illatum eſt Q. Fabio Maximo IV. M. Claudio Marcello Coſſ. (6) A. V. C. 540. Philippus Apolloniam cum claſſe adortus, ſublatis velis vertit ex improuiſo et Oricum cepit. M. Valerius praetor Romanus ad Oricum venit cum claſſe inſtructa, vrbem recepit, Apolloniae infeſtum regem per Q. Naeuium praefectum ſocium oppreſſit, inde claſſem ipſe oppoſuit regiis. Cum ſe teneri ſentiret Philippus, ſubductis aut incenſis nauibus, Macedoniam terreſtri itinere petiit, magnam partem inermi exercitu et ſpoliato. Res paullo ante hiemem geſta: claſſis Romana Orici hibernauit. Haec eſt illa Philippi regis claſſis, quam amiſſam fuiſſe Romano bello Plutarchus ſcribit. Poſt id vero res contra Meſſenios geſtae et Aratus offenſus. Porro etiam Liuius (7) Philippi in Illyrios bellum, quo bello Liſſus eſt capta ſub verem A. V. C. 544. M. Marcello M. Laeuino Coſſ. explicat. Fuit igitur Aratus veneno ſublatus inter A. V. C. 542. et A. V. C. 544. Iam, ſi Philippus A. V. C. 541. Meſſenios fines, populi, ſui quidem iuris, non alieno tamen ab Achaeis animo (8) inuaſit, eo anno primum ſimultates inter regem et veterem eius amicum conſiliorumque participem Aratum ſunt natae, ob quas Arato lentum venenum paullo poſt a Taurione, vt Polybius ait, exhibitum, ex quo decimum et ſeptimum praetor exſtinctus eſt. Vt Philippus rex Demetrium filium miſerit cum aliquot nauibus in Peloponneſum, vt is

(6) Liuius l. XXIV. 40. (7) l. XXVI. 25. (8) Pauſanias p. 350.

is aſtu et celeritate ſumma arcem Meſſeniorum occupauerit, Pauſanias narrat. (9) Id neceſſe eſt, contigiſſe tempore aliquo, quo nauigari potuerit, nec tamen adhuc obſeſſum a Romanis fuerit mare. Puta me dicere ſub A. V. C. 541 verem. His autem rebus geſtis Philippum regem ipſum adfuiſſe ad Meſſenam, e Polybii excerptis teneo, (10) eodem quoque veniſſe Aratum cum Arato filio. Et fuit Aratus eo tempore praetor. Nam Plutarchus (*) ſcribit, Meſſenios ſeditionibus agitatos, cum magiſtratus a multitudine diſſideret: ὁ μὲν Ἄρατος ὑςέρῃ βοηθῶν, ὁ δὲ Φίλιππος, ἡμέρᾳ μιᾷ πρότερον ἐλθὼν εἰς τὴν πόλιν, non modo aluit ſeditionem, ſed etiam auxit, vt apertam in vim erùmperet. Si Aratus ἐβοήθῃ, praetor fuit. Haec igitur eſt decima ſexta Arati praetura. Anno poſt res in Peloponneſo Philippus geſſit nullas: imminebat enim Macedoniae M. Valerius praetor cum claſſe. Quid igitur tandem? quo anno dicemus Aratum praetorem XVII. fuiſſe? A. V. C. 542. an A. V. C. 543. Caſaubonus extremam Arati praeturam poſuit Olympiadis CXLI. 2. A. V. C. 539. quod cum iis teſtimoniis, quae produxi, pugnat. Cum optio alterutrius anni nobis eſt relicta, nihil aliud ad ſuſpicandum de vero anno occurrit, quam veneni lenti mentio. Diſceſſit a rege hoſtilia omnia metuens ab eo, qui priuatim in domum ſuam deliquerat, publice Meſſenios adfligebat, Achaeis inſidiari videbatur, nulla fide, nullo be-

(9) p. 349. (10) p. 703. (*) p. 1050.

beneficiorum reſpectu. Philippus autem, vni e ducibus et familiaribus ſuis Taurioni negotium dedit, vt quam occultiſſime Aratum veneno aggrederetur. Is poſtquam in familiaritatem Arati irrepſit, cogitata perfecit: dedit autem venenum, vt ait Plutarchus, lentum, θέρμας τε μαλακὰς τὸ πρῶτον ἐν τῷ σώματι καὶ βῆχα κινῦν ἀμβλεῖαν, εἶτα ὅτως κατὰ μικρὸν εἰς φθορὰν περαῖνον. Ergo non tantum veneno, ſed etiam Taurioni tempus erat concedendum: veneno, vt graſſaretur, Taurioni, vt ſe apud Aratum neque Philippo, neque familiaribus eius pronum ad inſidias, inſinuaret. Quae mecum conſiderata ſic habui, vt inclinaret animus, Arati praeturam extremam A. V. C. 543. inſerendam potius eſſe, quam A. V. C. 542. Sed, vt infra oſtendam, A. V. C. 543. praetor fuit, et vel ſic ſatis temporis et Taurioni ad praebendam venenum et veneno ad nocendum tribui potuit, praeſertim ſi extremo tempore praeturae deceſſit Aratus. Deceſſit, vt Pauſanias tradit, (1) Aegii: inde corpus Sicyonem ductum honoresque diuini eius meritis decreti.

V. Venio nunc ad duodecimam praeturam Arati ſuo anno inſerendam. Plutarchus ſcribit: (2) duodecimum praetorem male pugnaſſe contra Cleomenem ad Lycaeon. Elapſus autem, collectis e fuga copiis, Mantineam ſociam Cleomenis vrbem occupauit. Ad Megalopolin cunctari viſus, oppugnan-

(1) p. 132. (2) p 1043. Pauſanias ſcribit p. 131. 539. ad Dymen fuiſſe pugnatum, vbi Aratus praetor agros habuit.

gnantibus Spartanis vrbem. Lyſiades Megalopolitanus, qui eum in annum praeturam cum Arato petierat, iam antea infenſus Arato, ſine mandato praetoris aggreſſus Lacedaemonios, fortiter pugnans occubuit, inuidia in Aratum redundante, veluti deſtituiſſet aemulum laudis. Quam ob rem annuum exercitus ſtipendium praetori mulctam dixit. Ad exercitus raptim Aegium conceſſit, populusque Orchomenium vindicauit ignominiam deuictis Spartanis et Megiſtono Cleomenis vitrico capto. His rebus geſtis Aratus praetura non modo deceſſit, ſed eam etiam in perpetuum abiurauit: motus tamen poſtea Achaeorum diſcrimine recepit, vt infra declarabo. Praetorem fuiſſe duodecimum A.V.C. 531. Olympiadis CXXXX ½ ex ſequentium annorum rebus colligitur. Nam poſt Arati hanc praeturam Timoxenum in magiſtratu illo fuiſſe, Plutarchus teſtatur: (3) poſt Timoxenum fuiſſe praetorem Hyperbaten, e Plutarchi Arato (4) et Cleomene (5) colligo. Hyperbate praetore, Mantinea amiſſa, Achaei ad Hecatambaeon in Dymaeis ingenti praelio fuſi, acciuerunt Cleomenem, quem pace facta, ducem ſibi legerent. Hic vero Aratus, quod poterat, tum vi, tum artibus ſuis obtinuit, vt Cleomene deluſo, res Achaea ad opem Antigoni tutoris ſpectaret. Ergo Cleomenes bellum Achaeis indicit, (nam antea magis tumultus, quam iuſtum bellum fuerat,) Pellenen oppugnat elapſoque Hyperbate praetore, vrbe potitur. Ar-

Fff 3 gi

(3) p. 1044. (4) p. 1045 (5) p. 811.

giui quoque et Sicyonii rebus nouis ſtudebant: Corinthiorum violentas manus vix euaſit Aratus. Inde Corinthii ſe ſuaque Cleomeni dediderunt: Achaei vero ad Aratum frequentes conuenerunt Sicyone, praetoremque eum libera cum poteſtate, quod alii nemini honori datum, et cum praeſidio delectorum adoleſcentium creauerunt. Hanc praeturam, quae, vt vides, decima tertia fuit, certiſſimis ratiociniis ſuo in anno conſtituere poſſumus, ex quo deinde rationibus ſubductis annus quoque duodecimae praeturae exibit. Bellum hoc Cleomenium Olympiade CXXXIX. geſtum eſſe, ſatis conſtat. Eſt vero a Cleomene indictum ipſo tempore, cum Nemea celebrarentur, teſte Plutarcho. (6) Ergo primo anno Olympiadis CXXXIX. Nam tertio anno eiusdem Olympiadis cum Nemea altera inſtaurarentur, vt e Polybio (7) conſtat, bello Cleomenico finis eſt impoſitus. Nemea autem tertio cuiusuis Olympiadis anno ineunte aeſtiua, primo exeunte hiberna erant. Hiberna, vt videtur, duodecimo ſecundi hiberni menſis die. Igitur praetura decima tertia Arati, orto bello Cleomenico, coepit ſub anno ſecundo eius Olympiadis ſeu A. V. C. 531. cum ipſo aeſtatis principio. Plutarchus de hac praetura, (8) τριάκοντα μὲν ἔτη ϰ̀ τρία πεπολιτευμένος ἐν τοῖς Αχαιοῖς, πεπρωτευκὼς δὲ ϰ̀ δυνάμει ϰ̀ δόξῃ τῶν Ελλήνων. Iam quae ſententia Plutarchi ſit, vide. In reipublicae gerendae praeceptis, (4) ὕτω, inquit, παρῆλθεν ἐις δέξαν

(6) p. 812. (7) p. 216. (8) p. 1046.

ξαν Ἄρατος, ἀρχὴν ποιησάμενος πολιτείας τὴν Νικοκλέους τοῦ τυράννου κατάλυσιν. Cum verſatum in republica dicit, ab eo tempore, quo Nicoclen tyrannum Sicyonium oppreſſit, iſthuc quidem non plane ſignificat, inde iam vsque in magiſtratibus eſſe coepiſſe, at Plutarchi tamen animo eam opinionem ſediſſe, non abſurdus eſt, qui ſuſpicetur. Illi autem triginta tres anni non poſſunt ab alio principio duci, quam ab eo tempore, cum praetura annua fuit conſtituta ab Achaeis. Nam in decima tertia ptaetura, vt vides, Aratus tertius et triceſimus praetor annuus fuit. Sic, puto, tempus ipſe in commentariis inſigniuerat Aratus: non, quod tot annos magiſtratus geſſerit, ſed quod, hoc illius formae reipublicae ſpatium exſtiterit. Antequam decimum et tertium praetor fuit, ſub Nemeis ludis, bello Cleomenico indicto, Aratus cum Antigono egit, vt auxilio veniret Achaeis contra Spartanos. Et cum Antigonus alia conditione quam tradendae Corinthi ſeſe moturum non eſſe oſtendit, Aratus miſſo ad regem Arato filio de foedere conuenit in eam conditionem, quod tum Corinthus auulſa a nomine Achaico Spartanis ſe dedidiſſet. (10) Auctumnus erat cum Antigonus aduentaret Cleomenesque exercitum haberet ad Iſthmum: interea Argos per Ariſtotelem Argiuum proditione receperunt Achaei. (1) Dux memorabilis rei Aratus, ſed Macedonicis cum copiis, vt priuatum eo tempore fuiſſe appareat. (2) Ciuita-

(9) p. 804. (10) Polybius p. 191. 192. (1) Polyb. l. c. (2) Plut. p. 1046.

uitates aliae quae defecerant, metu perculſae redierunt ad foedus Achaicum: Cleomenes ne a Macedonibus et Achaeis includeretur, receſſit, Antigonus Acrocorintho recepta hibernauit Corinthi et Sicyone. Ineunte vere Antigonus Tegeam mouit eaque vrbe et Mantinea Orchomenoque captis, ipſe ad conuentum Achaeorum ſub auctumno profectus exercitum in hiberna dimiſit. Haec igitur maximam partem perpetrata ſunt, Arato praetore: erat adhuc praetor, cum Cleomenes otioſos arbitratus hoſtes in hibernis agere, Megalopolin admotis copiis cepit, primo autem vere fines Argiuorum inuaſit. Initio denique aeſtatis, hoc eſt, cum praetor nouus Achaeorum iniſſet magiſtratum, Antigonus in Laconicam mouit, Cleomenemque tandem magno praelio vicit, in quo Philopoemenis adoleſcentis virtus eluxit, quem poſtea praetorem nominabo ſaepius. Cleomenes nocte, quae diem conſecuta eſt, e Sparta auffugit in Aegyptum: vrbs capta, vetus reipublicae forma et diſciplina reſtituta. Paucis diebus poſt, Antigonus, audito, Illyrios impreſſionem feciſſe in Macedoniam, motis caſtris Argos venit ſub ipſum tempus Nemei ludicri. Haec aeſtiua erant Nemea XII. Panemi ſiue Olympiadis CXXXIX. 3. A. V. C. 532. XVI. Quintilis ſecundum Dodwell tabulas. Olympiadis CXL. 1. Lacedaemonii nouis rebus ſtudentes Ageſipolin et Lycurgum crearunt reges: is annus, inquit Polybius, (3) erat a fugato Cleo-

(3) p. 422.

Cleomene tertius. Ita omnia in hac parte chronologiae confirmata ſunt. Illo autem anno, quo victus fugatusque eſt Cleomenes, Timoxenum Achaeorum praetorem fuiſſe, inuenio, vt paullo poſt dicam amplius. Ante Aratum praetorem duodecimum, in magiſtratu fuit Ariſtomachus Argiuus. Hoc plane intelligere mihi ſum viſus e Plutarcho. (4) Nam is narrat, Ariſtomachum Argiuum tyrannum, cum Aratus eum ad ſocietatem Achaicam pellexiſſet, ſpe praeturae propoſita, quae glorioſior eſſet, quam tyrannis, aurem praebuiſſe conditioni, Lyſiadem autem, qui tum praetor erat, vt ſuum iſthuc meritum eſſet, Ariſtomachum ſibi conciliaſſe. Cum de ſumma rei ageretur in concilio, Aratus Ariſtomachum perculit, mox permiſit tamen auctorque adeo fuit, vt non modo reciperetur, ſed etiam, vt praeturam in proximum annum Ariſtomacho decernerent Achaei. Ea in praetura Ariſtomachus, inuito Arato, cum Cleomene tyranno Lacedaemonio ſimultates aluit, quae erupere in tumultum. Cum ad Pallantion Cleomenes ſe obtulit, Aratus autem Ariſtomachum abſterruit, ne ſigna conferret, ea calumnia Lyſiades duodecimam praeturam petenti Arato ſe extorſurum putauit. Nihil tamen egit. Apparet autem e Plutarchi Cleomene (5) etiam, Aratum paullo ante Ariſtomachum praeturam geſſiſſe. Nam cepit Caphyas Aratus: ea occaſione Cleomenes cum copiis mouit, oppoſitusque

(4) p. 806. 1043. 1047. (5) p. 806.

tusque Cleomeni eſt Ariſtomachus praetor. Habes ordinem rerum illum, vt non modo, quo anno Ariſtomachus praetor fuerit, intelligatur, ſed etiam vt Aratus ante Ariſtomachum, ante Aratum Lyſiades collocandus ſit. Hic Lyſiades tres praeturas geſſit. Auctorem habeo Plutarchum.(6) Sed haec ceteraque quae inter ſecundam et duodecimam Arati praeturam interceſſere, accuratius expendenda duco.

VI. Demetrius rex Macedoniae, quo anno Philippum filium orbum, Antigonum autem tutorem reliquerit, Polybius declarat, ſub ipſum inquam tempus expeditionis Romanorum in Illyrios. Demetrius Illyriorum regem Agronem concitauit, qui ſuſcepto bello haud dubie ſuperior, nimis laetus ea felicitate, mortem commeſſationibus accelerauit, relicta in regno vxore Teuta. Teuta proxima aeſtate nouas copias in Graeciam immiſit, quo tempore cum Achaci ſubmiſiſſent Aetolis auxilia naualia, pulſi ab Illyriis, Marcum Carynenſem, qui exercitum ductabat, amiſerunt. Submerſus enim eſt cum naue. (7) Eadem aeſtate Cn. et L. Coruncanius legati Romani de iniuriis expoſtulatum venere ad Teutam. Hi, dum redeunt, ſummiſſis percuſſoribus caeduntur. Ea cauſſa anno poſt Cn. Fuluius Centumalus L. Poſtumius Albinus Coſſ. cum exercitu profecti in Illyricum, vno anno bellum confecerunt. Obiit igitur De-

(6) p. 1041. (7) Polybius p. 137.

Demetrius rex A. V. C. 525. Antigono Tutori Dexippus et Porphyrius annos XII. Euſebius XX. attribuunt. Antigonus autem, cum, vt ſupra demonſtraui, A. V. C. 532 capta Sparta, raptim moueret in Illyrios, adulta aeſtate hoſtes acie vicit. Hic, cum lateribus non peperciſſet clamando monendoque milites, ſanguinem vomere coepit ex eoque morbo non multo poſt diem obiit ſupremum. (8) Ergo vix octo annos rebus Macedonicis praefuit et ſub A. V. C. 553 fato functus eſt. Simul apparet, Marcum Carynenſem A. V. C. 524 praetorem fuiſſe. Paullo antequam Ariſtomachus conſilia de tyrannide ponenda communicauit cum Arato, hic Athenas occupauerat et Piraeeum, Munichiam, Salaminem et Sunium datis CL. talentis Diogeni praefecto Macedonici praeſidii, receperat. (9) Mortuus tum maxime erat Demetrius rex. Obiit autem A. V. C. 525. Et eo anno Athenis in concilium Achaicum receptis, praetorem, non Aratum, ſed alium fuiſſe, diſerte teſtatur Plutarchus. (10) Scribit enim, Athenienſes, accepto, Demetrium deceſſiſſe, acciuiſſe Aratum: ὁ δὲ καίπερ ἑτέρου μὲν ἄρχοντος τότε τῶν Ἀχαιῶν, tamen accurrit. Bene igitur in hunc annum Lyſiadis praetura conuenit, vt qui ſuperiori anno Arati factione a tertia praetura depulſus, tamen eum nunc aequo iure petere et conſequi eſt viſus. Marco Carynenſi Lyſiadem cedere oportuit, cum tertiam peteret praeturam. Obſtitit enim Aratus priua-

(8) Polybius p 215. 216. (9) Pauſanias p. 130. (10) p. 1047.

tim infenſus Lyſiadi. (1) Antea autem παρʼ ἐνιαυτὸν ἦρχε μὲν ἐναλλὰξ τῷ Ἀράτῳ ϛρατηγῶν Λυσιάδης, vt ait Plutarchus. Sic Arati X. IX. et VIII. praeturam, ſimul cum duabus Lyſiadis ordinauimus.

VII. Lyſiades antea tyrannus Megalopolitanus Aratum metuebat adeo, vt Ariſtippo Argiuorum tyranno ſublato, vnice in ſe verſum tandem leniendum obſequio et deponenda tyrannide cenſeret. Quod cum accidit, eo anno non erat praetor Aratus. Accitus enim Megalopolin ad Lyſiadem venit, (2) quod eum facturum non fuiſſe praetorem, puto. Conſentit denique ipſa fere ratio, vt Lyſiadem ſe ſuosque anno Achaico 45 tradidiſſe, anno autem 47 praetorem fuiſſe ponamus, quod non videntur paucis interiectis diebus aut menſibus Lyſiadi praetori rem publicam udituri fuiſſe Achaei, quem paullo antea oderant tyrannum: annus vnus interiectus eluere poterat inuidiam. Igitur A. V. C. 518 a Lyſiade, vt dicebam modo, Megalopolis eſt tradita Achaeis. Et ita ſe geſſit Lyſiades (ſeu vt Pauſanias atque Plutarchus Λυδιάδης et Λυδιάδας: quamquam nos Polybium potius ſequimur, apud quem eſt Λυσιάδης et Λευσιάδας Dorice) ita, inquam, ſe geſſit, ὡς Ἀράτῳ παρισωθῆναι τὰ ἐς δόξαν, *vt vitae dignitate atque publica exiſtimatione Arato nihil concederet*, quod ait Pauſanias. (3) Quod de Ariſtippo ty-

(1) Plutarchus p. 1041. (2) Plutarchus p. 1041. (3) p. 657.

tyranno dictum eſt, id vero explicatius ediſſeremus: aperiet enim nobis aditum ad patefaciendam nouam praeturam Arati Aratus ſtatuit, (4) ſublato per inſidias Ariſtomacho, Achaeos in libertatem vindicare. Prodito conſilio, Ariſtomachus nihilo magis tutus, a ſeruis ſuis obtruncatur. Sed Ariſtippus tyrannidem occupat, fruſtra cum ſubitariis copiis Arato aduolante. Ariſtippus Achaeos, quod in pace arma cepiſſent, iudicio poſtulauit, priuatim vero vel in primis infenſus Arato, inſtinctu Antigoni Gonatae regis percuſſores ſubmiſit. Fruſtra tamen laqueos tendebat viro inter ſuos ſpectabili et gratioſo. Aratus cum exercitu adortus Ariſtippum ad Chareta fluuium acri praelio pugnauit. Vbi hoſtilem exercitum auctum ſubſidiis ſenſit, Cleonas ſeſe contulit, eaque in vrbe Nemeorum ludicrum inſtaurauit. Haec Nemea aeſtiua acta ſunt Olympiadis CXXXIV. 3. anno ineunte, menſis aeſtiui ſecundi die XII. In hunc ſolum annum illa Nemea quadrant. Nam in eiusdem Olympiadis primo anno exeunte, quae acta ſunt Nemea hiberna, ea nondum ita laeta fuere Achaeis, vt Aratus Argos ſpectare poſſet. Immo poſt illa Nemea Aratus primum praetor res ad Corinthum geſſit. Etiam Nemea hiberna Olympiadis CXXXV. 1. anni huc trahi non poſſunt. Nam eo maxime anno Aratus cum Aetolis bellum geſſit. Plutarchus, (5) vt ſemel narrationem inſtituerat de rebus Argiuis, ita

(4) Plut. 1039. 1040. (5) p. 1041.

ita eam perſecutus eſt, resque Megalopolitanas et Lyſiadis ſubiunxit, denique, quod omiſerat eo in ſermone, Aetolicum bellum attingit. Sane et Ariſtippi caedes et Lyſiadis res omnes poſt iſthuc bellum collocandae ſunt: non item illa Nemea. Nam in hunc ipſum primum Olympiadis CXXXV. incidere non poterant, quia Aetolico non Argiuo bello diſtinebatur Aratus: neque in tertium annum eius Olympiadis, poſt Aetolicum bellum A. V. C. 517. quoniam duobus annis ante et amplius Antigonus Gonatas rex iam obierat, quem tum maxime, cum eas res ad Chareta geſſit Aratus, *ſuperſtitem* fuiſſe, Plutarchus declarat. Doduellus rationes perturbauit. (6) Putat enim Aratum Olympiadis CXXXII. ½ primum fuiſſe praetorem; ea autem in praetura bellum Aetolicum eſſe *geſtum* cenſet. Hoc de bello Aetolico repugnat omnibus rationibus noſtris, quas puto ſatis eſſe firmatas. De prima praetura Arati atque ſecunda multis iam ſupra diximus, quo in loco Polybii quoque teſtimonium, quod offenſioni fuit Doduello, expendimus. Nunc vide alia, quae Doduello obſtant. Aratus perſuaſit Agidi Lacedaemoniorum regi, vt ſocietate cum Achaeis inita, Aetolos a Megaricis finibus depelleret. Cum ad Corinthum conueniſſent et Agis cenſeret pugnandum eſſe cum Aetolis, antequam Peloponneſum inuaderent, Aratus obſtitit, ὅτι βέλτιον ἡγεῖτο τοὺς καρποὺς σχεδὸν ἅπαντας συγκεκομισμένων ἤδη τῶν γεωργῶν, παρ-
ελθεῖν

(6) In Cyclis p. 323.

ελθεῖν τοὺς πολεμίους. Agis oſtendit ſe facturum, quod viſum eſſet Arato, καὶ γὰρ πρεσβύτερόν τε εἶναι καὶ στρατηγεῖν Αχαιῶν. Sic Plutarchus ex Arati commentariis. (7) Aratus, vt regem plane in ſententiam ſuam adigeret, magnam partem exercitus dimiſit: Agis vbi ſeſe deſeri ſenſit et ipſe ſe recepit Lacedaemonem: vbi per Ageſilaum ephorum omnia turbata inuenit, ad Chalcioecum confugit, Cleombrotus alter rex in aede Neptuni ſedit ſupplex. Leonidas ab exilio reuocatus, regnum, e quo fuerat pulſus, recepit, Cleombrotum exulare iuſſit, Agim inſidioſe captum coniectumque in carcerem ephororum iudicio tradidit. Hi laqueo ceruicem regis eliſerunt. Leonidas rex Agiatiden Agidis vxorem opulenti haeredem patrimonii, probis mulierem moribus et forma praeſtanti, vi coegit, vt Cleomeni filio ſuo nuberet. Illa ſocerum mariti ſui interfectorem ſummo odio proſequuta eſt, περὶ δὲ αὐτὸν τὸν νεανίσκον ἦν ἀγαθὴ γυνὴ καὶ φιλόστοργος. Iam paullo ante Cleomenicum bellum, Democrates exul Lacedaemonius, Cleomenis indolem ſpectans et vigorem aetatis, Arato vndecimum praetori (vt ſatis e Plutarcho (8) apparet, ſi cum rationibus noſtris eius teſtimonium conferatur) dixit: ὥρα σοι ταχύνειν, πρὸ τοῦ κέντρα φῦσαι τοῦτον τὸν νεοσσόν. Fuerit licet hic νεοσσὸς annorum triginta, tum cum Aratus praetor XI. erat Olympiadis CXXXVIII. 4 ergo Olympiadis CXXXII. 2. vix annorum ſeptem puer fuit: qui ma-

(8) p. 801. (8) p. 806.

malum potuit ducere Agiatiden? Quae, cum ita ſint, non is extremus annus Agidis fuit. E contrario bellum cum Aetolis nullum gerere poterant Achaei adulto paullum Demetrii Macedonis regno. Nam contra illius potentiam Achaei Aetolique foedus iniuerunt. Ergo cum ceterae rationes conſentiant, nihil autem repugnet, Aetolicum bellum geſtum eſt Olymp. CXXXV. 1. ſeu, vt ex iis, quae e Plutarcho protuli, liquet, auctumno, meſſe iam conuecta ab agricolis A. V. C. 514. Poſt autem, vbi Demetrius Antigono Gonatae ſucceſſerat, Athenas aggreſſus eſt Aratus, (9) ſextum praetor.

VIII. Redeo ad Aetolicum bellum. Ab Corintho, vt dixi paullo ante, ſocios dimiſit Aratus, ipſe denique receſſit: Agis rex nonnihil moratus, vt magnum oſtentaret et Spartano dignum animum, tandem et ipſe ſe recepit. Per hanc opportunitatem Aetoli Peloponneſum ingreſſi Pellenen ceperunt: at Aratus repente ea in vrbe adortus Aetolos laſciuientes, acie ante moenia vrbis vicit et cum hoſtium agmine irrupit in vrbem. Verum, inquit Plutarchus, (10) cum multae atque validae gentes conſpirarent in Achaeos, Aratus ſtatim cum Aetolis et pacem et foedus confirmauit. Has gentes puto, primum Macedonas, quos aeque metuebant Aetoli Achaeique, qui nunc defuncto Antigono Gonata, nouo ſub rege Demetrio

(9) Plutarchus p. 1046. (10) 1046.

trio videbantur in ordinem redigi poſſe, qui Ariſtippum Argiuorum tyrannum aluerant aduerſus Aratum: praeterea Argiuos ipſos et Megapolitanos, qui ſub tyrannis adhuc erant: denique Spartanos, qui Agide illa hyeme ſublato, acta illius improbare videbantur. Quare nihil veroſimilius, quam Aratum ſequentibus etiam tribus annis fuiſſe praetorem, cum tot terrores Achaicum nomen circumſiſterent. Noli autem mirari continuatas Arati praeturas ſummo in diſcrimine rerum. Plutarchus de Arato ſic habet: (1) *tantum polluiſſe auctoritate*, ὥςʼ ει μὴ κατʼ ἐνιαυτὸν ἐξῆν, παρʼ ἐνιαυτὸν αἱρεῖσθαι ςρατηγὸν αὐτὸν, *vt, ſi non quotannis contingeret eum praetorem legi, tamen ſecundo quouis fieret.* Tum is ipſe quoque, vbi narrauit, quantis terroribus agitatus Ariſtippus tyrannus, quantum ſibi cauerit, ad Aratum flectens ſermonem, ὁ δʼ οὐχ ὅπλοις κατὰ βίαν, νόμῳ δὲ ὑπʼ ἀρετῆς ἀκατάπαυςον ἀρχὴν πεποιημένος, *libere tamen egit.* Quid ἀκατάπαυςος ἀρχὴ, niſi continuatae praeturae? Et hoc commemorat Plutarchus ita, vt facile intelligas, eum extrema Ariſtippi ſpectare. Ariſtippum autem Arato VIII praetore oppreſſum eſſe, ex eo colligo etiam, quod mox Lyſiades id ipſum metuens, ſe ſuaque tradidit Achaeis anno Achaico 45. Praetorem tum fuiſſe Dioetam puto. Illum, inquam, de quo Polyaenus in ſtratagematis. (2) Διοιτας ςρατηγὸς Αχαιῶν. τὴν Ηρεαίων πόλιν Φανερῶς ἑλεῖν οὐ δυνάμενος, ἀφανῶς εἷλε, Φθείρας μεγάλοις

(1) p. 1038. (2) l. II. extremo.

λοις χρήμασι τῶν Ηρεαίων τινας. Bene Caſaubonus: *ſcribendum* τὴν Ηραιέων πόλιν *et mox* Ηραιεῖς. Nam ita eſt τὸ ἐθνικὸν apud Polybium et Pauſaniam et Stephanum Byzantium: vrbs ipſa Ηραῖα in Arcadia, haud procul a Meſſene, vt ille Stephanus, ad Alpheum fluuium, vt notum e Pauſania. Nulli ſane anno magis conuenit vrbs capta et attributa Achaeis, (recepti autem ſunt ab Dioeta in fidem, ὡς εἰσαῦτις ὑπήκοοι γενησόμεναι τοῖς Ἀχαιοῖς,) quam huic anno. Reliqui enim anni nullum interuallum relinquunt Dioetae praetori. At cum Aratus XIII. praetor erat, Heraeenſes ad Lacedaemonios *defecerant*. Nam quod Polybius teſtatur, (3) Antigonus Tutor Mantinea per deditionem occupata, Heraeam et Telphuſſam duxit, παραλαβὼν δὲ καὶ ταύτας τὰς πόλεις, ἐθελοντὶ προσχωρησάντων αὐτῷ τῶν κατοικούντων Aegium ad concilium populi profectus eſt. Manſit vrbs ſub praeſidiis Macedonicis, donec anno Achaico 57 Philippus rex, *reddidit Heraeam et Triphyliam Achaeis*, vt ait Liuius. (4) Fuit igitur antea Achaeorum Heraea, quam ad Lacedaemonios, inde ad Macedonas traducta eſt.

IX. Reliquae ſunt praeturae duae Arati, decima quarta et decima quinta, vtraque facile expedienda. De decima quarta prius dicam paucis. Celebris ea eſt clade Achaeorum ad Caphyas accepta. Aetoli poſt Antigoni Tutoris mortem inuaſere

(3) p. 194. (4) l. XXXII. 5.

uaſere Meſſenios anno Achaico 35. cum Timoxenus praetura nondum abiiſſet, (5) Aratus autem prator eſſet deſignatus. Eo lentius peragente negotium, Aratus quinque diebus anticipato magiſtratu mandata dedit ad ciuitates, vt Megalopolin conuenirent, qui arma poſſent ferre. Inde duxit in Aetolos et clade maxima ad Caphyas eſt adfectus. Aetoli victoria vſi, Pellenenſes et Sicyonios agros populati, per Iſthmum disceſſere domum, quod aeſtas vtique vergeret et Philippum aduentare fama eſſet. Philippus Corinthi congregatis ſociis, bellum in Aetolos decernit, quod ex eo ſociale dictum. Paucis poſt diebus ſolemne concilium Achaeorum conuenit, in quo Aratus omnibus probris ſententiisque proſciſſus, populum dicendo et commemoratione rerum ſuarum placauit. Id concilium Olympiadis CXXXIX. 4. habitum fuiſſe diſerte tradit Polybius, (6) ſic inquam vt vergerit in Olympiadem CXL. Interim Aratus e decreto concilii ſocios in arma concitat, exercitum conſcribit, bellum parat. Polybius iſtius anni notam quoque indicat, quod tum Saguntini ab Hannibale petiti fuerint, (7) ſed ita tradit, vt appareat eum res Carthaginienſes accommodare ad Achaicas. Primum enim refert Aratum Arati filium patri ſucceſſorem datum, (8) eo autem praetore Saguntinos petiiſſe Hannibalem. Saguntus oppugnari coepit M. Liuio, L. Aemilio Coſſ. vt Polybius Liuiusque memoriae prodiderunt. Horum

(5) Plut. p. 1049 Polybius p. 383. (6) p. 394. (7) p. 413. 425. (8) p. 424.

conſulatus incidit in A. V. C 535. ab Idibus Martiis, vt tum erat, cum adhuc procederet tum primus annus Olympiadis CXL. tum praetura Arati minoris ſuperiori anno ſuſcepta. Fuit Aratus filius patris diſſimillimus et ſegnis imperator. Eo praetore bellum ſociale coepit. Aratum minorem Eperatus Phareenſis in praetura ſecutus eſt, depulſo ab illius ſpe magiſtratus Arato patre per Philippi regis factiones, vt Plutarchus (9) et in primis Polybius (10) teſtantur. Eperato praetore Polybius ſcribit Hannibalem petiiſſe Italiam, P. Scipione Ti. Sempronio Coſſ. ipſo teſte Polybio (1) Olympiadis CXL 2. Bene hoc conuenit. Bellum ſociale finem habuit Olympiadis CXL. 3. vt Polybius duobus locis teſtatur. (2) Tum autem praetor fuit decimum quintum Aratus pater. Nam Philippus rex ſegnitiem Eperati pertaeſus, cum Arato Sicyone rediit in gratiam, vt anno poſt Eperatum praetor fieret. (3) Arati praeturas ſuis annis adſignauimus ita, vt multorum aliorum quoque praeturas conſtitutas ſimul habeamus.

X. Vnum ad extremum non praetermittam. Ioſephus Scaliger in ἱστοριῶν συναγωγῇ (4) narrat, Agin Eudamidae filium in Eleos mouiſſe, Megalopolin oppugnaſſe, Pellenen cepiſſe, praelio cum Mantinenſibus commiſſo, et re male geſta incidiſſe in Aratum et tum exercitum amiſiſſe, tum vitam. Haec teſtatur in canonibus iſagogicis (5) Scaliger ſe edidiſſe, *vt geſta colligi potuere*, ne forte putes ex MSto

(9) p. 1049. (10) p. 480. (1) p. 525. (2) p. 414. 617. (3) Polybiu l. V. c. 30. (4) p. 366. (5) p. 341.

MSto quodam fragmento haec eum edidiſſe. Nimirum ſecutus eſt Pauſaniam, qui haec ita de Agide tradita reliquit, (6) vt ipſam aciem, qua ab Arato Sicyoniorum et Achaeorum duce atque Lydiade Megalopolitano victus fuerit Agis, inſtruat. Fuit, vt ait, eodem in praelio Podares dux Mantineenſis, eius Podaris, qui aduerſus Epaminondam pugnans cecidit *ἀπόγονος τρίτος*, quod niſi reddas pronepotis filium, ſane non video, quomodo in iſtius Agidis tempora congruat, cuius res ſupra attigimus. Sed is Agis bello non cecidit: necatus eſt admodum iuuenis in carcere: ac ne geſſit quidem bellum, niſi cum Achaeïs ipſoque Arato contra Aetolos. Alio loco Pauſanias, (7) cum dicit, Eleos inuitos ſecutos fuiſſe Lacedaemonios contra Athenienſes in bello Peloponneſiaco, (vt conſtat etiam ex Thucydide,) tum vero addit, *συνέστησαν δὲ μετὰ οὐ πολὺν χρόνον ἐπὶ Λακεδαιμονίους Μαντινεῦσιν ὁμοῦ καὶ Ἀργείοις* et denique res Philippi Amyntae regis ponit. Rurſum alio in loco (8) bellum inter Lacedaemonios Eleosque cauſſam accepiſſe prodit eo tempore, cum a Thebanis victi Lacedaemonii Olympico ludicro arcerentur. Denique alio in loco (9) hunc Agida Eudamidae ſic deſignat, vt nullum ſit dubium, quid ſenſerit, quemue Agiden indicauerit. At cum Agin ſcribit, (10) Pellenen Achaeorum vi cepiſſe, ab Arato autem Sicyonio mox fuiſſe eiectum, hic ego vero Pauſaniam teneo in manifeſto errore, vt qui legerat Agide opem ferente Achaeis captam ab Aetolis

(6) p. 619 (7) p. 383. (8) p. 454. (9) p. 657. (10) p. 539.

Pellenen et mox recuperatam ab Arato. Quare nihil eſt verius, quam quod fecit infinitis in locis Pauſanias, idem feciſſe in Agide Eudamidae multaque diuerſorum temporum facta et ducum nomina confudiſſe, quod multis verbis refellere huius neque loci neque argumenti eſt. Satis eſt, ſi explodatur Pauſanias, ne quem incautum fallat.

Caput Tertium
De octo Philopoemenis praeturis.

PHilopoemen annum agens LXX. praetor octauum a Meſſeniis captus et veneno ſublatus eſt. Fuiſſe eum hoc anno praetorem, Plutarchus ſub extremo vitae neque dicit, neque penitus diſſimulat. Scribit vero Philopoemenem Argis ex febre male habuiſſe, cum de Meſſeniorum tumultu adferretur, ad eum nuncium aduolaſſe nihilominus vno die Megalopolin ſtadia amplius quadraginta, atque inde cum equitibus quos voluntarios ſecum ducebat, ad Colonidem obſidione liberandam feſtinaſſe. Nihil praetorii in toto illo ſermone, donec necato Philopoemene ſubiicit, Achaeos οὐδ' ἡντινοῦν ἀναβολὴν ποιήσασθαι τῆς τιμωρίας ἀλλ' ἑλομένους στρατηγὸν Λυκόρταν impreſſionem feciſſe in Meſſenium agrum, vbi necem eius vlti, combuſto cadauere, cinerem magna cum pompa funeris deuexerunt. Tulit autem vrnam, vt is quoque habet, Polybius Lycortae praetoris filius, cuius hiſtorias nunc magis lugemus adeo

cru-

crudeliter laniatas, quam Achaei Philopoemenem amiſſum. Iuſtinus ſcribit, (1) Philopoemenem antequam cicutam biberet, quaeſiſſe, *an Lycortas praefectus Achaeorum euaſiſſet.* Puta eum dicere praetorem, aut magiſtrum equitum. At Plutarchus tantum de Lycorta ſine magiſtratus nomine quaeſiſſe tradit. Cum autem adeo raptim lectus eſt praetor Lycortas, vides vtique deſideratum fuiſſe imperatorem. Et fuiſſe Philopoemenem praetorem, Liuio tutiſſime credas, qui Polybium ſtudioſe expreſſit. Sic autem ait: (2) *cum bello ſuperiores eſſent Achaei, Philopoemen praetor eorum capitur, ad praeoccupandam Coronem profectus.* Addit cetera etiam, quae Plutarchus habet, ſeptuaginta annos iam natum et diutino morbo viribus attenuatis equites nobiliſſimos gentis nuper a ſe lectos relinquendi pudore, eos in laqueos ſeſe induiſſe. Addit deinde de Lycorta, quod nobis lucem praebet in Iuſtino fidum auctorem Trogum Pompeium ſecuto: *is*, inquit, *alter imperator Achaeorum erat.* Sane cum et Liuius et Iuſtinus ſimul de Lycorta et equitibus quaeſiſſe tradunt, argumento id quoque eſt, Lycortam tum ἱππάρχην Achaeorum fuiſſe. Iam Pauſanias quidem (3) de Philopoemene, ὡς δὴ τῶν Ἀχαιῶν ὄγδοον ἀπεδέχθη τότε ἡγεμών, *a Meſſeniis captus eſt:* caue autem ſic Pauſaniam interpreteris, veluti tum maxime Philopoemen octauum praetor in ſequentem annum fuerit deſignatus: nam ſic alias etiam loquitur, cum non deſignatum, ſed in magiſtratu fuiſſe aliquem

(1) l. XXXII. c. 2. (2) l. XXXIX. 49. (3) p. 704.

aliquem tradit. Octauam hanc Philopoemenis praeturam fuiſſe, exploratum quoque habeo e numero ſuperiorum praeturarum. Et Plutarchus diſerte: ἤδη γεγονὼς ἔτος ἑβδομηκοςὸν, ὄγδοον δὲ τῶν Ἀχαιῶν ςρατηγῶν. Quidam Graecorum inſignem anni iſtius notam ponunt, Philopoemenem, Annibalem, P. Scipionem Africanum deceſſiſſe haud magno interuallo, anno vno, vt eſt apud Liuium. (4) Valerius Antias apud eundem, (5) Annibalem mortuum prodidit Q. Fabio Labeone, M. Claudio Marcello Coſſ. Alii alio in anno mortuum ferunt: item in Scipione maiore controuerſia eſt, quae in Philopoemene eſſe poteſt nulla. Nam his plane Coſſ. caſum eius refert Liuius. Liuium cum dico, puta me dicere Polybium, quem is accurate perſequitur. Et quis accuratius poterat nouiſſe tempus, quam *Polybius*, qui Philopoemenem extulerat? Philopoemenis in locum Lycortas magiſter equitum ſuffectus eſt. Nam, quod ſupra e Plutarcho oſtendi, vt nuncius de clade praetoris allatus eſt, repente a concilio Achaico iuſſus eſt praeturam ſuſcipere. Hic vno impetu oppreſſit Meſſenios, de interfectoribus ſupplicium cepit, ſummam vero rei Meſſenicae ad concilium, quod tum Megalopoli conuenerat, reiecit. *Δευτέραν σύνοδον* vocat Polybius (6) vt intelligas, conuentum eum ſub auctumno fuiſſe. Ergo tempus deprehendimus, quo tempore Meſſene in ordinem redacta eſt. Polybius (7) ſecundo Olympiadis CXLIX. anno legatos Achaeorum veniſſe Romam ſcribit,

(4) l. XXXIX. 50. (5) l. XXXIX. 56. (6) p. 1206. (7) 1202.

ſcribit, et tum maxime adfuiſſe Q. Marcium legatum Romanum, quem iisdem Coſſ. Senatus miſerat, vt, quoniam Meſſene deſciuerat a concilio Achaico, res ſociorum in Peloponneſo adſpiceret, cum e Macedonia rediiſſet, in quam potiſſimum mittebatur. (8) Ex his facile intelligas, ſuperiori hieme defeciſſe Meſſenios, vt peruagata rei fama, Roma excire eius excitu veris legatum Romanum poſſet. Venit primum in Macedoniam, tum in Peloponneſum, quod aliquantum temporis interuallum requirebat: tamen cum Romam rediit, nihil de Philopoemenis exitu adſerebat, e contrario Achaeorum potentiam criminantis in modum praedicabat. Fuit igitur initio aeſtatis, cum Q. Marcius in Achaeis ageret, nihil magnae rei ſusceptum: paullo poſt vero Philopoemen praetor captus et necatus, Lycortas ſuffectus ſub auctumno in concilio Meſſenios reſtituit. (9) Quis autem mihi repugnabit, ſi eundem Lycortam poſt ſuffectum magiſtratum, praeturam quoque ſequentis anni ob rem bene geſtam ſuscepiſſe dicam? Sic meritus erat, ſic mihi videor Achaeos pernouiſſe, vt merita nulla ſine praemio virtutis relinquerent.

II. Inſignis quoque eſt ſecunda Philopoemenis praetura, in qua Nemeum ludicrum ſpectauit, non magno interuallo a pugna ad Mantineam, inſigni honore et populi plauſu exceptus, teſte Plutarcho. (10) Nemea illa alia eſſe non poſſunt, quam Olympiadis CXLIII. 3. anno ineunte. Sic autem

(8) Liuius l. XXXIX. 48. (9) Polybius p. 1206. (10) p. 362.

Plutarchus ſatus eſt: Λέγεται τῆς τῶν Νεμείων πανηγύρεως συνεστώσης, στρατηγοῦντα τὸν Φιλοποιμενα τὸ δεύτερον καὶ νενικηκότα μὲν οὐ πάλαι τὴν ἐν Μαντινείᾳ μάχην, τότε δὲ σχολὴν ἄγοντα τὴν ἑορτὴν κ. τ. λ. Loquitur de ea pugna, qua Philopoemen praetor Machanidam tyrannum Spartanum ad Mantineam vicit manuque ſua interemit. Si iſtius pugnae tempus inueſtigauero, praeturam quoque primam tenebo. Polybius (1) pugnam ponit, inter Asdrubalem Hannibalis fratrem a M. Liuio, C. Claudio Nerone Coſſ. deuictum, et res a P. Scipione in Hiſpania *aduerſus* Asdrubalem Gisgonis geſtas. Hae res perpetratae ſunt ſub verem, A. V. C. 548. cum Q. Caecilius Metellus, L. Veturius Philo idibus Martiis conſulatum iniſſent, vt ſatis e T. Liuio ipſoque Polybio conſtat. Iam vero Philopoemen antequam Machanidam eſt adortus, tum emendandis populi moribus ordinandaque republica, quam Philippus rex nonnihil perturbauerat, tempus impendit, tum vero οὐδ' ὅλους ὀκτὼ μῆνας *menſes non integros octo*, vt ait Polybius, apparando bello. Si hos octo menſes a primis auſpiciis praeturae numeres, res geſta menſe Decembri A. V. C. 547. ſin aliquantum temporis ordinandae reipublicae praecipimus, vt hi octo menſes ſolo in apparatu poſtea ſint conſumti, incidemus in ipſum verem, paullo ante vernum Achaeorum concilium. Quid autem potius credamus, quam media hieme nihil mouiſſe Philopoemenem ex hibernis vero duxiſſe in Spartanos. Eo in prae-

(1) Polybius p. 879.

praelio magiſter equitum fuit Ariſtaenetus Dymaeus. (1) Quid deinde eſt manifeſtum magis, quam continuatum Philopoemeni fuiſſe magiſtratum, ſi, vt Plutarchus tradit, non dudum victis ad Mantineam Spartanis iterum praetor Nemeis interfuit Olympiadis CXLIII. 3. ineunte. Nam ſi interfuiſſet praetor iterum Nemeis Olympiadis CXLIV. 1. exeunte, non poterat pugna ad Mantineam recentis memoriae officia in populo Achaico concitare. Anno autem poſt, quem potius legerint praetorem, quam Ariſtaenetum Diaeum, qui adMantineam equitum magiſter praeclare pugnauerat. Nam ob rem bene geſtam ſummus magiſtratus ei debebatur, niſi Philopoemenis potius fuiſſet habenda ratio, cui continuaretur. Sic Lycortas, etiam re male geſta captoquePhilopoemene praetore,e magiſtro equitum ſuffectus eſt praetor. Et perſuadet hoc quoque nobis error Plutarchi, Ariſtaenetum hunc confundentis cum Ariſtaeno Megalopolitano, qui ex eo videtur ortus, quod vtrumque praetorem commemorari ſciebat Plutarchus. Ante Philopoemenem Niciam praetorem ponendum duco. Et Liuius quidem Niciae praeturam aeſtati illi inſeruit, qua aeſtate M. Liuius, C. Claudius Coſſ. fuere. (2) Sed neſcio quo ſeductum errore fuiſſe dicam. Nam ita fatus eſt ipſe: *Cum de finiendo Aetolico bello ageretur, nuncius affertur*, Philippo regi, *Machanidam Olympiorum ſolemne ludicrum parantes Eleos aggredi ſtatuiſſe: praeuertendum id ratus, cum expedito agmine Corinthum deſcendit.*

Iii 2 Audi-

(1) Polybius p. 879. (2) l. XXVIII. 7. 8.

Audito Machanidam receſſiſſe, *Aegium ſe ad concilium Achaeorum recepit.* Recte iſthuc ſane, quoniam ante Olympii ludicri tempus Aegii ſolemne concilium legendo praetori conuenire ſolebat. Reddidit tum Philippus Achaeis Heraeam et Triphyliam. Inde cum Achaeis repentinam impreſſionem claſſe deuectus in Aetoliam fecit. Ex Aetolia cum praeda Niciam praetorem Aegium remiſit, ipſe ad confirmandos ſibi animos aduerſus Attalum regem, Graeciam obiit. Vides ſane eo in concilio praetorem fuiſſe lectum Niciam, Liuiumque res ſub *primam* Olympiadem ineuntem transtuliſſe in *alterum* annum. Ante Niciam Cycliades praetor fuit anno Achaico 71. Nam Liuius (3) ſic ait: *Solemni Nemeorum peracto, paucisque additis diebus Dymas eſt profectus* Philippus: *Cycliadas, penes eum ſumma imperii erat, Achaeique ad Dymas regi occurrerunt.* Paucis poſt diebus ad Lariſſum fluuium pugna cum Aetolis, Eleis Romanisque acerrima commiſſa, (4) Philippus rex fuſus eſt. Fuiſſe tum magiſtrum equitum Philopoemenem, Plutarchus teſtatur. (5) Quod cum vix commemoraſſet Liuius, tum vero *exitu huius anni,* inquit, *T. Quinctius Criſpinus Cos. ex vulnere moritur.* Quae quidem longe grauiſſima eſt offenſio. Nam Nemea dixerat, non ſane ea, quae acta ſunt Olympiadis CXLIII. primo anno exeunte, quod omnes temporis iſtius rationes penitus conturbaret et in M. Liuii C. Claudii conſulatum incideret: ſed ea Nemea, quae acta ſunt ſuperioris O-

lympia-

(3) l. XXVII. 31. (4) ib. c. 31. 32. (5) p. 360.

lympiadis tertio anno ineunte, hoc eſt A.V.C.544. Ante Cycliaden praetor ſuit Euryleon, de quo Polybius in excerptis: (6) Ευρυλέων ὁ τῶν Ἀχαιῶν στρατηγὸς ἄτολμος ἦν ϗ πολεμικῆς χρείας ἀλλότριος. Tum vero, inquit, quia tempus eſt, vt ad res Philopoemenis progrediatur, recte ſibi ſactum videri, ſi mores et ingenium tanti ducis deſcriberet. Hoc dum perſequitur, καταςαθεὶς ὑπὸ τῶν Ἀχαιῶν ἱππάρχης ἐν τοῖς προειρημένοις καιροῖς. Vides eum Euryleone praetore, de quo paullo ante dixerat, etiam magiſtrum equitum fuiſſe? Non diffiteor tamen, in excerptis Polybianis ſaepe difficultatem maximam nobis obuerſari, cum de tempore quaeſtio eſt. Nam cum ſaepe ab inſtituto recedat Polybius, tum vbi receſſerit haud facile deprehendas. Poteſt igitur fieri, vt Philopoemenes magiſter equitum fuerit tantummodo praetore Cycliada. Iſthuc tamen ex excerptis Polybianis manifeſtum eſt, Euryleonem praetorem fuiſſe tempore aliquo inter expeditionem Hiſpanicam P. Sulpicio, Cn. Fuluio Coſſ. et Nemea, quae Cycliade praetore acta demonſtrauimus, nullo ſane alio, quam 68. anno Achaico.

III. Iam tertiam praeturam quando geſſerit Liuius teſtatum reliquit. P. Sulpicio Galba, C. Aurelio Coſſ. (7) Cycliaden praetorem fuiſſe tradit, cum Philippus rex ad Achaeorum concilium venit: *conſultabant*, inquit, *de bello aduerſus Nabin tyrannum Lacedaemoniorum, qui translato imperio a*

(6) p. 1387. (7) Liuius l. XXXI. 25.

Philopoemene ad Cycliaden, nequaquam parem illi ducem, dilapſa cernens Achaeorum auxilia, redintegrauerat bellum. Decretum eſt eo in concilio vt exercitus contra Nabin cogeretur. Simul Cycliadis alteram et Philopoemenis tertiam praeturam deprehendimus. Et Cycliaden artibus Philippi regis praeturam obtinuiſſe, Philopoemene repulſo, e Plutarcho conſtat. (8) Ante Philopoemenem praetorem fuiſſe Lyſippum, vide vt cognouerim. Plutarchus, (9) Lyſippum praetorem, Meſſeniis expugnatis ſcribit mouere non auſum eſſe in Spartanos: at Philopoemenem priuatum *ſuis cum ciuibus* Meſſenen hoſtium poteſtati eripuiſſe. Nullam notam temporis appoſuit: ſed hunc 79 annum Achaicum nobilem illa praetura fuiſſe ſic colligo. Polybius tradit, Machanida ſublato, Nabin *Spartae* inuaſiſſe tyrannidem et tres annos quieuiſſe ab externo bello, ciuibus opprimendis vnice occupatum, (10) quod tempus fere incidit hoc anno, cum, Machanidas caeſus ſuperioris Olympiadis anno ſecundo exeunte. Iam Philopoemene praetore, quem ab ipſa neceſſitate legiſſe videntur Achaei, et Meſſene recuperata laeti, quieuit Nabis: Cycliade autem praetore, vt ait Liuius, redintegrauit bellum. Haec quia optime cohaerent, mouent me ſane, vt hoc, quo dixi, anno potius Lyſippum praetorem recenſeam, quam ſuperiori.

IV. Poſt tertiam praeturam Philopoemenes cernens Philippum regem ſibi aduerſari, neque Achaeos

(8) p. 362. (9) p. 363. (10) p. 938.

Achaeos ſibi ſatis aequos eſſe, animis in Philippum plus quam in libertatem verſis, profectus eſt in Cretam, vt Gortyniis operam in bello nauaret: Philopoemenem anno Achaico 82 profectum eſſe inuenio. Nam Pauſanias ſcribit, eum exſpectaſſe, donec noui magiſtratus legerentur, vbi ſeſe excludi ſenſit, exceſſiſſe et vt Plutarchus declarat, eo maxime tempore, cum patriae periculum immineret a Nabide. Quare cum Achaei Ariſtaenum praetorem auxilio miſiſſent, Megalopolitani in Philopoemenem graues ſententias tulerunt, tamquam in deſertorem patriae, Ariſtaenus autem etſi ab eo in republica diſſidebat, tamen impediuit, ne quid grauius ſtatueretur. Praetor autem Ariſtaenus (ſic eum Polybius, (2) ſic Liuius, ſic Pauſanias, qui Megalopolitanum fuiſſe tradit, vocant, quorum apud me maior eſt auctoritas quam Plutarchi Ariſtaenetum vocantis) anno Achaico 82 fuit, vt mox demonſtrabo. Erant autem bello Romano flagrante Macedonia, tres factiones in Achaia, vna res trahentium ad Philippum regem, principem habebat Cycliaden, altera Romanarum partium Ariſtaenum, Philopoemen ſolam rempublicam et libertatem complectebatur. Philippus rex, vt tamquam mercede delinitis Achaeis magis obnoxiam ſibi eorum rempublicam haberet, Cycliade praetore conditiones tulit de bello Spartano ſuis opibus

(1) Plut. p. 363. Pauſan. p. 701. 702. (2) Ille quidem in excerptis Porphyrogenneteis p. 1421. etiam Αρισαινετον appellat, hoc vero potius Graeculo Conſtantini grammatico, quam Polybio tribuerim. Ortus error, quod Ariſtaenetus Diaeus confunderetur cum Ariſtaeno Megalopolitano.

bus conficiendo. Promiſſi regis inſidioſa erant, eaue cauſſa ab ipſo Cycliade ſunt reiecta. L. Cornelio Lentulo, P. Villio Coſſ. hieme, aut potius primo vere in Achaiam legatos miſit Philippus, *qui*, inquit Liuius, *iusiurandum* (*ita enim pepigerant quotannis iuraturos in verba Philippi*) *exigerent*: *ſimul qui redderent Achaeis Orchomenon et Heraeam et Triphyliam*. (3) Erat eo tempore adhuc praetor Cycliades, cui initio aeſtatis ſucceſſit Ariſtaenus, qui et Megalopolitanos a Nabide liberauit, et Romanam factionem defendens, Cycliadem pepulit. De ea re Liuius ita habet: (*) *Elatiam obſidenti conſuli rei maioris ſpes affulſit*, *Achaeorum gentem a ſocietate regia ad Romanam amicitiam auertendi*: *Cycliadem principem factionis ad Philippum trahentium res*, *expulerant*, *Ariſtaenus*, *qui Romanis gentem iungi volebat*, *praetor erat*. T. Quinctium Flamininum Cos. dicit. Is magiſtratum inierat idibus Martiis. Iam licet eo tempore, tanta προέμπτωσις anni Romani, quantam Ioſephus Scaliger et Dionyſius Petauius quoque ſtatuerunt, vt Ianuarius congruerit cum Septembri Iuliano, non fuit, expunxit enim hanc opinionem Ismael Bulialdus in epiſtola ad Gronouium patrem: tamen vnius menſis aut paullo amplius confuſionem fuiſſe, nemo negare auſit. Reuera igitur initio Februarii Iuliani ipſiusque veris A. Varroniano 556. conſulatum iniit T. Quinctius. Venit autem Brunduſio cum claſſe in Epirum maturius, vt ait Patauinus ille pater hiſtoriarum, quam ante eum ſoliti ſie-

(3) Liuius l. XXXII 5. (*) l. XXXII. 19.

fuerant conſules. Delectus et prodigia procuranda non ita multos dies eum retinere potuerunt Romae. Soluerit extremo menſe Februario Iuliano, et poſt nauigationem, vt is habet, quadraginta dies moratus, vno collocutus cum rege, tertio poſt hunc diem in faucibus Epiri ſummo praelio decertauerit, ante idus Apriles Iulianas, poterat victor diſcedere. Inde conſidera Liuium, quas res geſſerit conſul. Poterat circiter Kal. Maias obſidere Elatiam, eoue tempore cum populo Achaico agere per legatos, cum neque verna tempeſtas exiſſet, neque Ariſtaenus deceſſiſſet praetura. Fateor me quam arctiſſimis gradibus incedere in iſtius temporis veſtigiis, ſed ita me ipſe Liuius cogit, qui adeo perſpicue poſt ortum Pleiadum A. V. C. 556. Nicoſtratum fuiſſe praetorem demonſtrat. Nam cum ſequenti hieme Cos. ad Maliacum ſinum prope Nicaeam Philippo cum rege colloqueretur, erat, vt Liuius refert, cum Philippo Cycliades ille praetorius Achaeorum exul, cum conſule *Achaei duo Ariſtaenus et Xenophon.* (4) At cum ex iis ipſis hibernis conſul Argos peteret ad colloquium cum Nabide, *eodem*, inquit, *Nicoſtratus Achaeorum praetor cum auxiliaribus paucis venit.* (5) Fuit igitur eo tempore Ariſtaenus priuatus, Nicoſtratus autem praetor. Exacto eo anno Achaico, ſeu vt Liuius, (6) initio veris cum Boeotis egit T. Quinctius, vbi etiam Ariſtaenus praetor Achaeorum auditus ſuadere Boeotis ſocietatem Romanam. Ini-

(4) l. XXXII. 32. (5) l. XXXII. 39. (6) l. XXXIII. 1. 2.

tio veris nondum poterat iniſſe praeturam Ariſtaenus. At ſiue in tempore aliquantum aberrauerit Liuius, ſeu alia qua cauſſa Ariſtaenus maturius inierit magiſtratum, cogit tamen nos res ipſa, vt ſic praeturas conſtituamus, vt in faſtis conſtitutas vides. M. Porcio L. Valerio Coss. ab aeſtate praetorem fuiſſe Ariſtaenum, Liuius declarat. (7) Duxit enim illa aeſtate T. Quinctius aduerſus Nabidem, Ariſtaenus autem cum Achaeis eadem in expeditione fuit. Poterat hic quoque nobis ſcrupulum iniicere Liuius, quoniam poſt hiberna Romana illico et concilium habitum de bello gerendo ſcribit, et Ariſtaenum praétorem nominat, tamquam ſuperioris anni reliquam praeturam covere. At quod Liuium legenti occurret, tota illa aeſtate Ariſtaenus praetor Achaeos duxit. Vnus hac in re ſcrupulus, quod Liuius tradit, (8) cum T. Quinctius bello confecto et Nabidi tyranno Spartanisque pace data exercitum reduxit Elatiam in hiberna, Argiuos ludicrum Nemeorum indixiſſe. Haec Nemea ſunt hiberna, anno primo Olymp. exeunte, menſis hiemalis ſecundi die XII. At idem Liuius teſtatur, die ſtata propter belli mala praetermiſſum ludicrum, in aduentum Romani exercitus ducisque fuiſſe indictum. Nihil igitur ſcrupuli reſtat.

V. Redeo ad Philopoemenem. Hic vero tum maxime e Creta aduenit in patriam, cum T. Quinctius et Achaei Nabiden oppugnarent, illis Coss. illo, quo rem geſtam eſſe demonſtrauimus anno. Teſtem habeo Plutarchum. (9) Is quidem etiam ſic

(7) l. XXXIV. 24. 25. 26. (8) l. XXXIV. 41. (9) p. 363.

ſic ait: ἐφ᾽ ὃν εὐθὺς αἱρεθεὶς ἄρχων. At non ita feſtinauere Achaei in legendo duce Philopoemene, quod eorum animos profectione Cretica offendiſſet. T. Liuius (10) P. Cornelio, M'. Acilio Coſs. praetorem Philopoemenem nauali praelio a Nabide victum ſcribit: is enim Antiochi regis aduentu elatus rebellauerat. Sed ſuperiori aeſtate haec geſta fuiſſe et a Liuio duarum aeſtatum res coniungi, manifeſtum eſt. Nam cum M'. Acilium Cos. traieciſſe refert, tum vero rebus iſtis inſerit Diophanem praetorem, (1) qui res aduerſus Meſſenios geſſerit. Illis Coſs. quoque Nabidem tyrannum cecidiſſe ſcribit Liuius, (2) tum vero *Philopoemen audita caede tyranni profectus Lacedaemonem, cum omnia turbata metu inueniſſet, ſocietati Achaeorum Lacedaemonios adiunxit.* Plutarchus quidem refert, cum exercitu eum veniſſe Spartam et partem vi, partem gratia effeciſſe, vt Achaici corporis eſſe vellent ciues, vt eum tunc praetorem fuiſſe tibi perſuadeas: at Pauſanias rem facit planiſſimam. (3) Commemorata enim Nabidis nece ſcribit, Philopoemenem aduolaſſe Spartam et coegiſſe Lacedaemonios, vt ſe attribui concilio Achaico paterentur, non multo poſt Titum aduenîſſe (T. Quinctium dicit, qui tum legatione fungebatur, minime vero, vt Pauſanias habet, dux Romanorum eo bello fuit) et Diophanem Diaei filium Megalopolitanum, ἄρχειν ἐν τῷ τότε ᾑρημένον τῶν Ἀχαιῶν, *cui tum praetura mandata erat ab*

(10) l. XXXV. c. 25. (1) l. XXXVI. 31. (2) l. XXXV. 35. (3) p. 703. Plut. p. 365.

Achaeis, Lacedaemonem inuaſiſſe. Philopoemen vero, inquit, καίπερ ἐν τῷ παρόντι ἰδιώτης ὤν, *quamquam priuatus erat eo tempore*, portas vrbis claudi iuſſit. Ob quod meritum cum multa a Lacedaemoniis Philopoemeni tribuerentur, ille pecuniam reiecit ſuaſitque, vt ea potius Timolaum, qui in Achaico conuentu plurimum auctoritate valebat, amicum ſibi redderent. Eandem rem attigit Plutarchus.

VI. Rurſum praetor Philopoemenes Cn. Manlio, M. Fuluio Coss. Teſtis Liuius. (4) Graue eius decretum in Spartanos, videri ab iis foedus violatum: Spartani renunciandum ſocietati decreuerunt mittendumque ad Fuluium Cos. Cephalleniam legatos, qui ſe ſuaque dederent Romanis. Ea cauſſa ab Achaeis bellum Lacedaemoniis indictum: *ne extemplo gereretur, hiems impediit*, inquit Liuius. Habes notam temporis, vt intelligas, haec accidiſſe intra concilium auctumnale et initium hiemis. Nam paullo ante quae de loco concilii controuerſia inter Philopoemenem et Damiurgos fuerit, a Liuio relatum eſt. Cum Fuluius Cos. aduolaſſet poſtulaſſetque, vt de controuerſia cum Spartanis legatos Romam mitterent, miſſi Diophanes et Lycortas. Is omnia Senatui permiſit, hic ex praeceptis Philopoemenis poſtulabat, vt Achaeis ex foedere et legibus ſuis, quae decreſſent, agere liceret. Reſponſum a Senatu ita perplexum accepere, vt Achaei omnia ſibi conceſſa iudicarent. Hac veluti victoria elati Achaei bellum gerendum decernunt. Phi-

(4) li. XXXVIII. 31.

Philopoemeni, inquit Liuius, *continuatur magiſtratus*. Eo in magiſtratu exules Spartanos reduxit Lacedaemoniosque Lycurgi diſciplina repudiata, Achaeorum inſtituta ſequi iuſſit, muros vt diruerent, alia multa immitia mandauit.

VII. Reliqua eſt ſeptima Philopoemenis praetura, quam vide vt indagauerim. Lycortas praetor fuit P. Claudio, L. Porcio Coss. ita vt ſucceſſorem habuerit Philopoemenem octauum praetorem. Nam his Coss. tradit Liuius (5) legatos, quorum princeps Appius Claudius fuit, miſſos et ad Philippum et ad Achaeos veniſſe, Lycortam autem praetorem iis Clitore in Achaia dediſſe concilium. Polybii excerpta (6) Olympiade CXLVIII. datum fuiſſe teſtantur, ſeu ipſo initio praeturae. Miſſi ſunt legati poſtquam initio illius anni, puta ſub verem, Q. Caecilius ceterique legationem renunciauerant Conſulibus Senatuique Romano. Ergo huic Q. Caecilio ſuperiori anno Megalopoli dederat concilium populi Achaici Ariſtaenus praetor, (7) cum a Philippo rege veniens Caecilius pro Lacedaemoniis diſceptaret. Eo in concilio Diophanes cum Ariſtaeno ſentiebat, cum Philopoemene Lycortas et Archon. Ariſtaenus vir, quantum Philopoemenes in armis, tantum ipſe ciuili diſciplina et eloquentia potens: Romanorum vero, cum res Achaea patiebatur, ſtudioſiſſimus. (8) Spectata fuit eius prudentia illo in concilio, in quo tum Caecilium, tum ceteros legatos audiuit. Erant legati alii, qui a

(5) l. XXXIX. 33. (6) p. 1188. (7) Polybius p. 1179. (8) ib. p. 1439.

Ptolemaeo rege, alii qui Roma a Senatu redierant. Vtrosque miſerat Philopoemenes praetor. Ergo anno vno ante Ariſtaenum praetor ſeptimum fuit Philopoemenes. Miſerat autem Philopoemenes legatos Romam, poſtquam M. Lepidus Cos. oſtenderat, Senatui diſplicere, quae in Lacedaemonios ſtatuta fuiſſent, (9) vt ex eo intelligas, quo anno praeturam geſſerit Philopoemenes, qua in praetura belli Boeotici cauſſas quaeſiuit, paene vt in vim erumperet. (10) Hunc in modum praeturas octo Philopoemenis ordinatas digeſtasque habemus.

VIII. Diodorus Siculus in excerptis Valeſianis, (1) de Philopoemene ſic ſcribit: πολλάκις μὲν ϛρατηγίας ἠξιώθη, τεσσαράκοντα ἔτη τῦ πολιτεύματος ἡγϋμενος. Hi quadraginta anni procedunt a decima tertia praetura Arati. Tunc quoque Plutarchus (2) eum annos natum triginta in praelio aduerſus Cleomenem cum equitatu Achaico mirifice ſe extuliſſe ſcribit. Praelium ipſum a Polybio deſcriptum habemus. (3) Plane haec concordant. At ab eo tempore ſi dicas rempublicam tractaſſe Philopoemenem, nihil hoc ad praeturas, aut alium magiſtratum quem geſſerit. Nam ab ipſo praelio profectus eſt in Cretam, nec rediit niſi Euryleone praetore, cum illico magiſtrum equitum eum legerunt Achaei. Teſtis Plutarchus.

Caput

(9) Polybius p. 1173. (10) ib. p. 1174. (1) p. 298. (2) p. 358. (3) p. 208. ſeq.

Caput Quartum
De praetoribus poſt Philopoemenem vsque ad euerſam rempublicam.

LYcortam dixi Philopoemeni ſuffectum necem eius eſſe vltum, tum continuatam ei praeturam videri. Quantum in eo fuit, rempublicam confirmauit in futurum. (4) Anno Achaico 161. eundem fuiſſe praetorem Lycortam e Polybio, is Lycortae fuit filius, cognoui. Scribit enim in excerptis, (5) Ptolemaeum Epiphanem legatum miſiſſe ad Achaeos cum ampliſſimis muneribus, vt ſocietatem cum Achaeis iniret firmiſſimam: Achaeos cupide recepiſſe et poſt concilium ipſos quoque deſtinaſſe legatos tum alios, tum Lycortam: hunc autem ea cauſſa διὰ τὸ κατὰ τὸν καιρὸν καθ᾽ ὃν ἐποιεῖτο τὴν ἀνανέωσιν τῆς συμμαχίας ὁ Πτολεμαῖος, στρατηγοῦντα τότε συνεργῆσαι αὐτῷ, *quod cum foedus ſocietatemque reparauit Ptolemaeus, ipſe praetor fuit et enixe rem iuuit.* Igitur extremo tempore praeturae in concilio, in quo ſucceſſor Lycortae datus eſt, de ſocietate, inde etiam de Lycorta legato mittendo conuenit. Sed Lycortas fines non exceſſit, διὰ τὸ μεταλλάξαι Πτολεμαῖον περὶ τοὺς καιροὺς τούτους. Deceſſit Epiphanes Olympiadis CL. anno ſecundo inito A. V. C 575. Fuit igitur Lycortas praetor anno ſuperiori. Secundum Lycortam praetorem fuiſſe Hyperbatum Polybius teſtatum reliquit. (6) Is ex eorum factione fuit, qui

(4) Polybius p. 177. (5) p. 1215. (6) p. 1216.

Romanis fauebant, auctor mittendi Romam legatum Callicratem, omnium Achaeorum gratiſſimum. Callicrates vt rediit, quia nondum percrebuerat vulgo, quam pernicioſa adulatione Senatum Romanum armauiſſet in Graecos, praetor creatus eſt in ſequentem annum, vt excerpta Polybiana proditum memoriae reliquerunt. Quod poſtquam de Lycorta praetore proditum eſt in Polybii excerptis, mox excerpta ſequuntur de Hyperbato praetore, ea cum praefatione, ὅτι κατὰ τὸν καιρὸν τοῦτον ἀναδόντος Ὑπερβάτου τοῦ στρατηγοῦ διαβούλιον, id nondum nos ita certos de tempore relinquit. At poſtquam etiam de Callicratis praetura narratum eſt, tum vero in excerptis, C. Claudii, T. Sempronii Coss. expeditiones recenſentur, vt adpareat, nos veris annis praeturas adſignaſſe.

II. Eo tempore, cum iam moueret in Graeciam bellum Perſeus rex, Xenarchus praetor erat, haud obſcure iam antea non ſatis aequus Romanis, (7) nunc vero regem et res nouas non videbatur aſpernari. Incidit vero, vt e Liuio (8) intelligimus, praetura Xenarchi in aeſtatem, qua P. Scaeuola, M. Aemilius Lepidus Coss. fuerunt. Eodem teſte Liuio, (9) Xenarchi frater fuit Archon eiusdem in republica ſectae homo, Aegirates, ſi is ipſe eſt Archon, quem Polybius tradit, (10) poſtea legationem in Aegypto obiiſſe. Hic praeturam geſſit eo tempore, quo Q. Marcius Philippus legatus Graecas ciuitates obiit, cum Perſeo collocutus eſt de induciis, Boeotorum commune diſſoluit et Argis in concilio ab Achaeis impetrauit,

(7) Polybius p. 1198. (8) l. XLI. 23. (9) l. c. cap. 24. (10) p. 1228.

uit, vt Chalciden praeſidio ſuo tutarentur. Legatione ea Q. Marcius defunctus eſt κατὰ χειμῶνα, vt ait Polybius, (1) quod Liuius explicat, (2) *principio hiemis*. Et hic quidem legationem recenſet P. Licinio, C. Caſſio Coss. ſed apparet plane, antè eos Coss. ſuperiori aeſtate Q Marcium fuiſſe in Graecia. Nam renunciata legatione principio veris P. Licinius Cos. in Graeciam cum exercitu profectus eſt.

III. Iterum praetor fuit Archon A. Achaico 112. Nam Polybius tradit, (3) A. Hoſtilium Procos. ex hibernis in Theſſalia legatos miſiſſe circum ciuitates, qui etiam ad Achaeos peruenerint. Datum iis eſt concilium Aegii. Ab eo profecti in Aetoliam et Acarnaniam. Dum hic commemorantur, Achaei inter ſe conſultant, quid facto opus ſit. Decretum eſt, vt illico praeturam adiret Archon, attollentibus animos Achaeis, quod Hoſtilius ſuperiori aeſtate rem male geſſerat. Ea cauſſa Romae quoque maturata ſunt comitia creandis conſulibus. Creati ſunt Q. Marcius Philippus II. Q. Seruilius Caepio (4) ante diem V Kal. Februarias, vt Pighius Liuium reſtituit. Archoni praetori, qui vt caſum a republica auerteret, Romanis auxilia mittenda eſſe ſuaſerat, datus eſt magiſter equitum Polybius, (5) is cuius hiſtorias tanti facimus. Archonem praeturam magnis impenſis ſibi comparaſſe, Polybius quoque tradit.

IV. Magnae tum in Achaico populo erant auctoritatis, Arceſilaus, Ariſton Megalopolitanus, Stratius Tritaeenſis, Xenon Patarenſis, Apolloni-

(1) p. 1228. (2) l. XLII. 44. (3) Polybius p. 1241. (4) Liuius XLIII. 11. (5) Polybius p. 1244.

des Sicyonius eiusdem cum Archone ſententiae et Straton alterius factionis pro Perſeo, Lycortas neutrarum partium. Erant praeterea etiam Diophanes, Hyperbatonus, Callicrates, Theodorides Sicyonius, Andronidas, Ageſias, Ariſtodamus, Philippus, Lyciſcus, Eureas, Charopus, Telecles Megalopolitanus, Anaxidamus, alii. Et quanta multitudo fortium et nobilium virorum fuerit, ex ipſa reipublicae ruina eſt cognitum, de qua equidem dicam paucis verbis, quia de hiſtoria rerum Achaicarum ſcribere non inſtitui. Callicrates, quem anno Achaico 103 praetorem fuiſſe oſtendi, anno ante legatus cum eſſet Romae, cauillando criminandoque vulnera patriae retexit. Hic primum cognouere Romani, poſſe fieri, vt oppreſſa libertate Achaica ipſi ſoli omnia pro arbitrio agerent. In bello cum Perſeo Achaicis auxiliis non admodum ſunt vſi Romani, quod infidam ſocietatem fore crederent, cum nonnulli e criminatione Callicratis ſuſpecti eſſent. Confecto autem bello Macedonico, iam quaſi per otium diſſoluendi corporis Achaici conſilia agitabant. Perſeo deuicto ex Achaia legati Callicrates, Ariſtodamus, Ageſias, Philippus, in Macedoniam venere gratulatum de victoria. Inde Q. Aelio, M. Iunio Coſſ. e decem legatis Romanis, qui ad ordinandas res Macedoniae venerant, C. Claudius, Cn. Domitius profecti ſunt in Achaiam. (6) Ibi vero criminoſe accuſati in concilio Achaei, tamquam Macedonicis rebus magis quam Romanis aequi, nominatique vno verbo

(6) Polyb. p. 1284. Liuius. l. XLV. 31.

verbo omnes, qui bello cum Perſe rege praetores fuiſſent. Xenon autem magnae vir auctoritatis in concilio ſurrexit fiduciaque innocentiae, quoniam et ipſe praetor fuerat, ſe vero oſtendit adeo nihil in Romanos deliquiſſe, vt vel Senatum Romanum iudicem non reformidet. Hoc dictum arripuit legatus Romanus, iuſſique Romam venire ad cauſſam dicendam Achaei mille et amplius. (7) Εϛραλήγησα μὲν Αχαιῶν ϗ ἐγὼ, inquiebat Xenon apud Pauſaniam, cui autem anno eum ego praetorem adſcribam? Quoniam C. Popilio, P. Aelio Coſſ. bellum indictum eſt Perſeo, aut ante priorem Archonis praeturam, cum gliſceret bellum, aut ante ſecundam Archonis praeturam, cum et geſtum eſt et confectum. Quo me vertam neſcio. Poſt ſeptimum et decimum annum trecenti et paullo etiam minus, qui ſoli ex omni illo numero ſupererant, dimiſſi ſunt e carceribus, cum ſatis poenarum luiſſe viderentur. (8) Dimiſſi ſunt igitur L. Marcio, L. Calpurnio Coſs. Inde controuerſiae cum Lacedaemoniis. Miſſus eſt Sulpicius Gallus, qui Lacedaemonios Argiuosque diſceptantes conciliaret: is cauſſam reiecit ad Callicraten, ipſe ex auctoritate Senatus quam potuit plurimas ciuitates ab Achaico concilio auellere inſtituit. Fuit igitur tum praetor Callicrates. Modo item conſtaret, quo anno C. Sulpicius Gallus conſularis legatus fuerit in Graecia. Conſtat autem ex excerptis Polybianis (9) et Diodori Siculi (10) et ex Polybii excerptis Peireſcianis, (1) eum A. V. C. 598 apud Sardes legatum de Eumene rege iudicium quam acerri-

(7) Pauſanias f. 548. 549. (8) Pau anias f. 549. ſeq. (9) p. 1298. 1299 (10) legat. 21. (1) p. 144.

me exercuiſſe. Videtur igitur ſuperiori anno fuiſſe in Achaia. Nam Polybius Peireſcianus ſic de eo: C. Gallus χωρὶς τῶν ἄρτι ῥηθέντων ἀλογημάτων παραγενόμενος εις τὴν Ασιαν. Nulla ſane alia imprudenter facta, quam quae in Achaia perpetrauit. Fuit igitur Callicrates praetor anno Achaico 115. veluti in mercedem proditionis magiſtratus ei delatus ſit ab Achaeis Romano fulmine attonitis. Tandem Athenienſes Oropios adflixerunt: Oropii Achaeos Menalcida praetore acciuerunt, e quo fonte extrema calamitas manauit. Habeo auctorem Pauſaniam et ita habeo, vt extremae praeturae ex eo referri poſſint.

V. Menalcidas Spartanus, Diaeus, Damocritus, Diaeus iterum, Critolaus, Diaeus tertium, praetores ſucceſſerunt, teſte Pauſania. Horum praeturae ordinandae ſunt. Incipiam a Critolao. Ad hunc praetorem legati venere Romani, qui concilium gentis ſibi vt daretur, poſtularunt. Critolaus eos reiecit ad ſextum menſem et ſtatum gentis concilium ſub auctumno. (2) Venerunt igitur legati ſub ipſis auſpiciis praeturae. Inde Critolaus conuentum Achaeorum Corinthi indixit, vbi bellum eſſe gerendum cum Romanis decretum eſt. Q. Caecilius Metellus, pro praetore is Macedoniam tenebat, accepto nuncio, L. Mummio Cos. bellum mandatum Achaicum, maturandum duxit, vt belli Achaici confecti gloriam praeciperet. Primum per nuncios Achaeis edixit, vt quosdam alios populos, qui ſe a con-

(2) Pauſanias p. 557.

concilio Achaico ſeiunxerant, ſui iuris eſſe paterentur, ſic commiſſorum veniam conſecuturos et aequas pacis conditiones.(3) Interea Metellus copias deducit e Macedonia, Critolaus vero pacis mentione repudiata Heracleam obſidet. Aduentante iam ex Macedonia Metello, Scarphean recedit. Ipſo in itinere Metellus hoſtes aſſecutus cecidit. Critolaus nusquam neque inter viuos, neque inter mortuos repertus eſt. Liuius (4) veneno ſibi mortem conſciuiſſe prodidit. At Pauſanias in palude ad Oetan montem forte demerſum putat et incertus animi, multa alia in eum modum ſe ſuspicari poſſe oſtendit, vt, quod veriſſimum ſit, non adpareat. Hanc cladem alii ad Heracleam, alii ad Scarphean, Liuius ad Thermopylas acceptam ferunt. Scilicet inter Heracleam et Scarphean Thermopylae interiectae ſunt, quas iam traiecerat, teſte Pauſania, Critolaus, cum eum Romani conſecuti eſſent, vt clades illa ab tribus locis commode inſigniri queat. Refellendus mihi quoque vno verbo eſt Flori error, (5) qui ſic fatus eſt: *Critolai manum Metellus Cos. per patentes Elidis campos toto cecidit Alphaeo et vno praelio peractum erat bellum.* Nihil vsquam ſani. Neque enim in Elide, ſed longe extra Peloponneſum prope Macedoniam pugnatum eſt: neque vno certamine confectum bellum: neque Q. Caecilius Cos. fuit, ſed propraetore Macedoniam ordinauit. Fuit enim praetor Macedoniae A. V. C. 606 vicitque Andriſum Pſeudophilippum. Iulius Obſequens in prodigiis,

(3) Pauſ. p. 558. (4) epit. 52. (5) l. II. c. 16.

giis, Sp. Poſtumio, L. Piſone Coſs. Olympionicon ſynagoge ad primum annum Olympiadis CLVIII. Praetorem rem geſſiſſe, Velleius Paterculus, immo alii omnes produnt. Eodem tempore, dum in Macedonia Metellus praetor bello perſequitur Andriſcum, Damocritus praetor Achaeorum nouus Spartanos petiit, vt Pauſanias refert. (6) Iam cum Damocritus A. Achaico 133 praetor fuit, Diaeus autem anno poſt rebus Achaicis praefuit, vt e Pauſania conſtat, tum vero Diaeum excepit Critolaus, vides Critolaum A. Achaico 135 lectum praetorem, eadem aeſtate fuſum ad Thermopylas eſſe. *Diaeo* praetore, A. Achaico 132 legatis Romanis Corinthi datum concilium, in quo cum eſſent propemodum violati, ignominioſe vtique habiti, cauſſam excidio vrbis praebuere. (7) Nam etiam hic in Floro error refellendus: *Critolaus cauſſa belli, qui legatos Romanos, dubium an manu certe oratione violauit.* Diaeum dicere oportuit: Critolaus legatis Romanis in concilio nullum reſponſum dedit, iuſſis redire poſt ſextum menſem: neque tamen vel verbo vel re moleſtus fuit. Iam et Menalcidae praeturam et Diaei primam vides recte collocatam. Mutuo enim ſeſe omnes illae praeturae, quas produximus e Pauſania, exceperunt. Poſtquam Critolaus cecidit, Diaeus, *Achaici motus primus auctor*, vt vere Liuius, ei ſuffectus, copias collegit et *ad Iſthmon a L. Mummio Coſ. victus eſt*, vt habet epitoma Liuii. Nam Metellus per Thebanum agrum, Megaram, inde ad Iſthmum duxit. Dum ſe ad praelium accingit, Mummius Coſ. in

(6) p. 554. (7) Pauſ. p 556.

in caſtra venit. Sic Pauſanias. (8) Florus: *et vno praelio peractum erat bellum: iam et vrbem terrebat obſidio, ſed cum Metellus dimicaſſet, ad victoriam Mummius venit.* Et S. Aurelius Victor: (9) *L. Mummius aduerſus Corinthios miſſus, victoriam alieno labore quaeſitam intercepit: nam cum illos Metellus Macedonicus apud Heracleam fudiſſet et duce Critolao priuaſſet, cum lictoribus et paucis equitibus in Metelli caſtra properauit et Corinthios ad Leucopetram vicit duce Diaeo.* Fuit ſane in his rebus diſſenſio ſcriptorum claſſicorum, ne quid ab his, qui infra claſſem ſunt, confictum putes. Nam in hiſtoria miſcella, (10) Metellus praetor dicitur Achaeos Boeotosque ſocios duobus praeliis fudiſſe, vno ad Thermopylas, iterum in Phocide, illic viginti millia, hic ſeptem caeſa. Claudium puta Quadrigarium ea referre. *Valerius Antias*, inquit, *in Achaia pugnatum et viginti millia Achaeorum cum duce ſuo Dieuco cecidiſſe confirmat: at vero Polybius Achiuus, quamuis in Africa cum Scipione fuerit, tamen quia domeſticam cladem ignorare non potuit, ſemel in Achaia pugnatum cum Critolao duce adſerit: Dieucum vero adducentem ex Arcadia milites ab eodem Metello oppreſſum cum exercitu docet: igitur poſt exſtincta totius Achaiae praeſidia euerſionem vrbium Metello praetore meditante, Conſul Mummius repentinus venit in caſtra.* Dieucus ſcribarum vitio eſt Diaeus praetor. Ceterum facile vides, Liuii hoc eſſe fragmentum corruptis deprauatisque verbis, vt multa ſunt alia in hiſtoria miſcella et Paullo Diacono. Controuerſum reliquit Liuius, Metellusne an Mummius praelio vicerit Diaeum. Pauſanias autem (1) Mummium tradit pepuliſſe Diaeum, Diaeum fugiſſe Megalopolin et occiſu

(8) p. 560. (9) in viris illuſtribus c. 60. (10) p. 25 ed. Murat. (1) p. 560.

occiſa vxore, venenum hauſiſſe: Mummium die poſt pugnam ad Corinthum adfuiſſe, portisque apertis in ſumma perturbatione, non auſum ingredi, quod inſidias metueret: tertio die vi cepiſſe et incendiſſe vrbem. Plinius: (2) *capta eſt Olympiadis CLVI. anno tertio; noſtrae vrbis DCVIII.* Hic annus vrbis conditae nos admonet, Olympiadem CLVIII. ſcriptam fuiſſe a Plinio. Olympionica Scaligeri ad Olymp. CLVIII. 3. κατὰ τὸν αὐτὸν καιρόν, ὥς τισι δοκεῖ, Κόρινθος κατὰ Μυμμίυ κατεσκάφη, et anno quarto, triumphum L. Mummii de Achaeis et Corinthiis ponunt. Sic Velleius Paterculus (3) eodem anno et Carthaginem et Corinthum exciſam ſcribit Cn. Lentulo, L. Mummio Coss. Ad Olymp. CLX. cum ſtadio vicit Diodorus Sicyonius, annum primum, Antitheo archonte, eadem Olympionicon ſynagoge κατά τινας Μύμμιος τὴν Κόρινθον καθεῖλεν. Id quale ſit, Pauſanias declarat, (4) cum eodem anno, eodem archonte, ne ſtadionica quidem alio adſcripſit: ὁ δὲ πόλεμος ἔσχεν οὕτως τέλος. Igitur e Pauſania hoc inſeruit Scaliger. Nam exciſa Corintho, clades belli etiam alias vrbes abſumſit et forte Olymp. CLXI. primus praetor Romanus miſſus eſt in Achaiam. L. Mummius Cos. quidem omnem e ciuitatibus popularem ſtatum ſuſtulit, remque publicam tradidit optimatibus, concilia quoque ſingularum vrbium diſſoluit: non multis tamen annis poſt, Romani ſui cuique genti concilia reſtituerunt. Haec cum commemorauit Pauſanias, ἡγεμὼν δὲ ἔτι, inquit, καὶ ἐς ἐμὲ ἀπεστέλλετο. Praetorem dicit Achaiae, cui etiam Graecia parebat, quae quondam Achaeos habuerat principes. OB-

(2) l. XXXIV. c. 2 (3) l. I. c 12. 13. (4) p. 563.



fig: IX.



fig: XI.





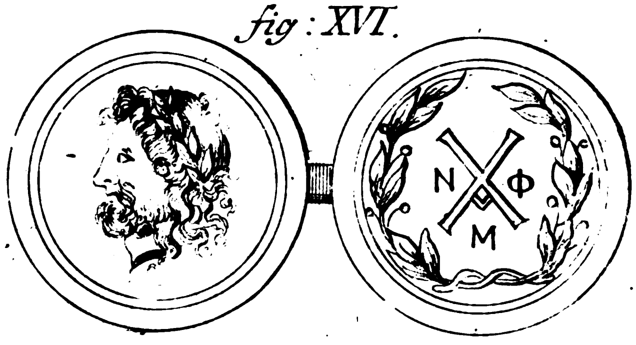
fig: XIII.



fig: XIV



fig: XVI.



OBSERVATIONES ASTRONOMICÆ ET PHYSICÆ IN RVSSIA INSTITVTAE.

ECLIPSIVM IOVIS SATELLITVM IN OBSERVATORIO PETROPOLITANO OBSERVATARVM CONTINVATIO,

PER

Joſephum Nicolaum De L'Isle.

Anni	Stilo novo.		Tempore vero. H.	'	''	
1735	Maii	21	13	52	37	IMmerſio 1. ſatellitis tubo Catadioptrico maiori obſeruata. Obſeruatio non admodum certa, ob nimium crepuſculum, cœlumque nebuloſum & caliginoſum.
	Aug.	16	9	19	32	Emerſio 1. tubo Catadioptrico maiori viſa, cœlo admodum ſereno et tranquillo.
	Oct.	10	6	31	50	Emerſio 1. tubo Catadioptrico maiori obſeruata. Cœlum equidem erat ſerenum & tranquillum; Iupiter autem non admodum eleuatus.
1736	Iunii	1	13	30	21	Immerſionis primi Satellitis tubo Newtoniano obſeruatæ tempus, ſi quartam minuti primi par-

Anni	Stilo nouo.	Tempore vero. H. ' ''	
1736			tem exceperis, ſatis certum; Iupiter enim valdè depreſſus, crepuſculumque ſat magnum erat.
	Iunii 21	12 50 0	Immerſio 4. tubo Newtoniano. Iouis altitudo admodum demiſſa, crepuſculique magnitudo obſeruationem ad minuti primi interuallum, reddunt incertam.
	Iulii 10	14 10 39	Immerſio 2. tubo Catadioptrico. Hæc obſeruatio dubia, ob nebulam.
	17	13 40 43	Immerſio 1. tubo 15. pedum Campaniano, cœlo claro atque ſereno.
		40 53	Tubo Newtoniano.
	Aug. 2	11 56 42	Immerſio primi Satellitis hoc momento obſeruata: potiùs eiusdem occultatio à Ionis diſco appellanda erat; quoniam unam ab altera, ob vicinitatem ſatellitis & Iouis diſtinguere haud licuit. Cœlum erat ſerenum, et Iupiter, meridiano ſiquidem proximus, in ſumma ferè altitudine. Tu-

bum

Anni	Stilo nouo.	Tempore vero H. ' ''	
1736.			bum Newtonianum in obſervatione adhibui, per quem ſatellitem intra plurima minuta diſco Iouis, antequam penitùs immergeretur, adhærentem magis magisque ſemet occultantem obſeruaui.
	Aug. 22	8 50 58	Emerſio 2. tubo Catadioptrico. Obſeruatio certa cœlo ſereno.
	29	11 31 12	Ioue à nube, quæ eum per 24. minutorum primorum ſpatium occultauerat emerſo, ſecundus ſatelles iam, ſed omni ſuæ claritati nec dum reſtitutus, conſpiciebatur; tubo Newtoniano.
	Sept. 13	7 51 37	Immerſio 4. Satelles hic iam à pluribus minutis ſenſim imminutus apparebat; quod autem ita lentè fiebat, vt momentum verum immerſionis ad aliquot minuta ſecunda incertum ſit. Præterea occultationi proximus ſatelles iterùm paullo maiori lumine fulgere,

Anni	Stilo novo	Tempore vero. H. ′ ″	
1736.			ac deinde illud iterum amittere viſus fuit.
	Sept. 23	9 5 30	Hoc ipſo momento, quo Iupiter, quem nubes per horæ dimidium vi ſui eripuerant, apparebat, ſecundus ſatelles è Iouis vmbra iam emerſus conſpiciebatur tubo Newtoniano, multò minori tamen luce quam cæteri ſatellites. Obſeruationem hanc ventus vehemens reddidit difficillimam.
	Oct. 5	7 45 23	Emerſio 1. tubo Catadioptrico, ſatis accurata, coelo claro atque ſereno & Iove Meridiano proximo.
1737	Iulii 4	13 39 55	Immerſio ſecundi, tubo Newtoniano. Crepuſculum iam ingruebat ſatis forte.
	9	12 51 1	Immerſio tertii, tubo Catadioptrico, cœlo ſereno.
	22	11 39 42	Immerſio primi, tubo Campaniano 15. pedum.
		39 53	- - - tubo Catadioptrico. Cœlum ſudum.

Aug. 7	9 56 44	Immerſio primi, tubo Newtoniano. Cœlum per interualla nubibus obtegebatur.
21	12 57 17	Immerſio tertii, circiter æſtimata, namque 15. min. ſecundis ante hoc tempus Iupiter & Satellites à nubibus abſcondebantur, cùm tertius immerſioni proximus, iam valdè diminutus appareret, tubo reflectente.
28	15 43 26	Immerſio primi, tubo Newtoniano, intra aliquot minuta ſecunda difficulter æſtimata, ob nimiam Satellitis & Planetae viciniitatem. Lux etiam crepuſculi aliquantùm obſtabat.
30	10 12 18	Immerſio primi, tubo Campaniano 15. ped.
	12 22	tubo altero 13. ped.
	12 38	tubo Catadioptrico. Cœlum erat apprimè ſerenum & quietum: ita tamen primus Satelles vicinus erat diſco Iouis, ut

OBSERVATIO DEFECTVS LVNAE HABITA PATAVII AB I. POLENO, TVBO OPTICO LONGO PEDES PARISIENSES SEPTEM, Kal. APRIL. MDCCXXXVI.

H.	′	″	
10	56	30	PEnumbra occupat marginem Lunae.
11	0	0	Initium vmbrae ad Lunae limbum.
11	2	48	Vmbra tegit Grimaldum.
11	7	12	Attingit Ariſtarchum.
11	8	22	- - Kepplerum.
11	17	50	- - ad medium Copernicum.
11	27	54	- - Archimedem.
11	29	6	Occupat Tychonem.
11	42	30	Medium tenet mare Nectaris.
11	47	58	Attingit Mare Criſium.
11	53	12	Tegit totum Mare Criſium.
11	58	0	Totalis immerſio.
13	32	40	Lux aliqua tenuis in Lunae margine.
13	34	6	Vera emerſio circa id tempus.
13	39	18	Grimaldus totus emergit.
13	40	17	Extra vmbram Galilaeus.
13	44	16	Ariſtarchus.
13	48	15	Kepplerus.
13	50	21	Medium Maris humorum (forſan tantillo plus).
13	55	26	Copernicus.
14	3	14	Tycho.
14	10	37	Menelaus.
14	13	8	Totum Mare ſerenitatis.
14	13	37	Medium Dionyſii.
14	26	20	Medium Mare Criſium.
14	29	19	Totum Mare Criſium.
14	33	34	Viſus eſſe vmbrae finis verus.
14	35	0	Iam finit emerſio ab omni etiam penumbra.

FINIS.

3 2044 092 615 178